SOCIETY. INTEGRATION. EDUCATION
Proceedings of the International Scientific Conference. Volume I, May 26th, 2023. 452-462

PIEMĒRU UN PRETPIEMĒRU KONSTRUĒŠANA PAMATSKOLĀ APGALVOJUMA PATIESUMA PĀRBAUDEI

Construction of Examples and Counterexamples in Primary School to Verify the Truth of Statements

Anita Sondore
Daugavpils University, Latvia

Valentīna Beinaroviča
Daugavpils University, Latvia

Pēteris Daugulis
Daugavpils University, Latvia

Abstract. *In the modern mathematics learning process in school, the skill of creating examples and counterexamples in both familiar and new situations is emphasized. In the context of critical thinking, the construction of examples and counterexamples is an effective technique for evaluating statements and justifying arguments. This technique is suitable for students before other methods of proving general statements in mathematics are introduced.*
The aim of the study is to highlight the topics of the study course "Elements of Mathematical Logic and Set Theory" for the Professional Bachelor's degree in Teacher Education, which are relevant for constructing examples and counterexamples. In the study, the qualitative and quantitative analysis of the answers of the students in teacher programs to the questions of the questionnaire about the student experience related to the ability to formulate examples and counterexamples was carried out. The research shows that the creation of examples and counterexamples to the given statements does not cause great difficulties. It is much more difficult to create statements with mathematical content for grades 1-6, the truth verification of which, using the technique of constructing examples and counterexamples, would activate the formation of understanding of mathematical concepts and relationships. In order to connect the topics of the "Elements of Mathematical Logic and Set Theory" course with the planned results of primary education, a qualitative content analysis of the Latvian primary education standard and the primary education program was carried out.
Based on the results obtained in the study, the authors identified several topics that are relevant in the course "Elements of Mathematical Logic and Set Theory".
Keywords: *counterexample, critical thinking, logic, negation, statement, truth value.*

https://doi.org/10.17770/sie2023vol1.7071

Ievads
Introduction

Daugavpils Universitātes (DU) Profesionālās augstākās izglītības bakalaura studiju programmā "Sākumizglītības skolotājs" ir iekļauts jauns kurss "Matemātiskās loģikas un kopu teorijas elementi" (MLKT). Tā mērķis ir iepazīstināt studējošos ar matemātiskās loģikas un kopu teorijas pamatjēdzieniem, to savstarpējo sakaru, kā arī ar to lietojumiem matemātisku apgalvojumu formulēšanā un pamatošanā. Tāpēc docētājiem aktuāls jautājums, ar kādu saturu- aktivitātēm nodarbībās, patstāvīgā darba un starppārbaudījumu uzdevumiem, piepildīt paredzētās tēmas.

Pētījuma mērķis ir iezīmēt Profesionālās augstākās izglītības bakalaura "Sākumizglītības skolotājs" studiju kursa "Matemātiskās loģikas un kopu teorijas elementi" tēmas, kuras ir aktuālas topošajiem sākumizglītības skolotājiem tādu valoddarbības prasmju, kā piemēru un pretpiemēru konstruēšanai, apgalvojuma patiesuma pamatošanai.

Sākumizglītības pedagogs ir atbildīgs, lai skolēni, beidzot 6. klasi, apgūtu prasmi veidot piemērus un pretpiemērus gan pazīstamās situācijās, gan jaunās situācijās, saistot to ar zināmo (MK noteikumi Nr. 747 [MK747], 2018). Šī prasme palīdz realizēt pamatskolā matemātikas mācību priekšmeta standarta prasību– veidot izpratni par jauniem objektiem un darbībām, atšķirt objektu būtiskās īpašības, palīdz skolēnam noteikt apgalvojuma patiesumvērtību un pamatot savus spriedumus (Ministru Kabinets, 2018).

Tika veidots gadījuma pētījumu dizains. Iesaistītie DU skolotāju programmās studējošie, ar tiesībām mācīt matemātiku 1.-6. klasei (n=25, pētījums veikts 2022. gadā), rakstiski atbildēja uz aptaujas jautājumiem. Lai arī pilotpētījuma rezultāti apliecina, ka prasme veidot piemērus un pretpiemērus dotajiem izteikumiem nesagādā lielas grūtības topošajiem sākumizglītības skolotājiem, taču studentiem ir grūti pašiem izveidot izteikumus ar matemātisku saturu 1.-6. klasei.

Tāpēc MLKT kursā jāvelta liela uzmanība teksta pareizai konstrukcijai un jēdzienu izpratnei. Pārliecinājāmies, ka piemēru un pretpiemēru konstruēšanas prasmes apgūšanai aktuālas MLKT kursa tēmas- izteikuma jēdziens un tā patiesumvērtība, nolieguma konstrukcija saliktiem izteikumiem, izteikumu loģikas formulu izmantošana izteikuma struktūras analīzei. Kā arī ieteicams ieviest atsevišķu tēmu- piemēri un pretpiemēri apgalvojuma patiesuma pamatošanai. Lai sasaistītu MLKT kursa tēmas ar pamatizglītības sasniedzamajiem rezultātiem, tika veikta pamatizglītības standarta un pamatizglītības programmas (Ministru Kabinets, 2018) kvalitatīvā kontentanalīze.

Literatūras apskats
Literature Review

Loģika ir „zinātne, kas pēta likumības, kurām seko organizēta un pareiza domāšana" (Cīrulis, 2007). Domāšanu nevar atdalīt no valodas. Valoddarbība ir viens no matemātikas jomas uzdevumiem (Mencis & Kumerdanka, 2021). Svarīga ir pakāpeniska pāreja no ikdienā lietotās valodas uz matemātikas valodu, kas nepieciešama gan problēmu analīzei, gan spriedumu izteikšanai, gan jaunu jēdzienu apgūšanai. Sevišķi sākumskolā ir aktuāla pamatjēdzienu apgūšana ar izpratni, lai nepareizība nenostiprinātos apziņā, kuru vēlāk grūti labot (Sondore, Krastiņa, Daugulis, & Drelinga, 2016a). Lai noskaidrotu, vai skolēns ir izpratis konkrēta matemātikas jēdziena, parādības, sakarības būtību, skolēnam jāspēj to paskaidrot ar saviem vārdiem, sasaistīt ar citiem jēdzieniem, sakarībām un atbilstošiem piemēriem un pretpiemēriem (Mencis & Kumerdanka, 2021).

Viens no pamatjēdzieniem matemātiskajā loģikā ir izteikums. Izteikumam ir divas patiesumvērtības: patiess vai aplams. Ar pretpiemēru saprot atsevišķo izteikumu, kas pierāda, ka vispārīgais izteikums nav patiess, tāpēc pretpiemēri palīdz labāk izprast gan definīcijās, gan teorēmās dotos nosacījumus (NMS, 2022; Nodelman, 2018). Parasti saka, ka piemēri tiek izmantoti ilustrācijai, bet pretpiemēri demonstrē kādas hipotēzes aplamību vai nepamatotību.

Pilotpētījumā 2017. - 2018. gadā pārliecinājāmies, ka pretpiemēra jēdzienu neizprot ne tikai pamatskolēni, bet arī daļa topošo un esošo skolotāju (Sondore, Krastiņa, Daugulis, & Drelinga, 2018). Tas apliecināja, ka ir jāpastiprina matemātiskās loģikas apguve skolotāju studiju programmās. Jo tiek uzsvērts, ka matemātikas izglītībā pretpiemērus var un vajag pielietot jau agrīnos posmos, sākot ar jēdzienu apguvi, vēl ilgi pirms skolēni iepazīstas ar teorēmām un to pierādīšanu (Nodelman, 2018), pie tam paradoksu un pretpiemēru lietošana jēdzienu izpratnei, ir efektīva (Gruenwald & Klymchuk, 2003; Kachapova, Black, Klymchuk, & Kachapov, 2007). Konfrontācija ar pretpiemēru skolēniem darbojas kā dzinējspēks, lai izlabotu vai uzlabotu pierādījumu. Pētījumā par saistību starp taisnstūra laukumu un perimetru, kurā piedalījās 4.- 6. klašu skolēni, tiek izcelta pretpiemēru loma kognitīvā konflikta radīšanā, kā arī nepieciešamība attīstīt skolēnu spēju konstruēt pretpiemērus un nostiprināt izpratni, ka pietiek piedāvāt tikai vienu pretpiemēru, lai konstatētu apgalvojuma aplamību (Widjaja & Vale, 2021). Skolēniem neliekas acīmredzami, ka viena pretpiemēra pietiek. Autori (Zaskis & Chernoff, 2008) pat iesaka pretpiemērus iedalīt- pārejas un izšķirošais, jo tika konstatēts, ka viens pretpiemērs ne vienmēr pārliecina pat topošo sākumskolas skolotāju.

Skolēnu deduktīvās domāšanas spējas, veidojot pretpiemērus matemātikā, tiek iedalītas piecos līmeņos. Pirmais līmenis atbilst situācijai, ka skolēns nevar sasaistīt apgalvojumu ar piemēru izmantošanas nepieciešamību, ceturtais līmenis- skolēns secina, ka izteikums ir nepatiess, konstruējot vienu vai dažus pretpiemērus, bet augstākais piektais līmenis ir skolēniem, kuri izveido pretpiemēra eksistences aprakstu, izmantojot matemātiskos simbolus (Amirudin, Fuad, & Wijayanti, 2018). Sākumskolas skolēniem ir grūti spriest deduktīvi, izmantojot tikai vārdus un simbolus, šādi bērni spēj labāk veikt deduktīvo spriešanu ar manipulatīviem objektiem vai veidojot "darbības pierādījumus (Semadeni, 1984). Tādējādi piekto līmeni sākumskolas skolēniem varētu interpretēt kā prasmi aprakstīt vispārēju iemeslu vai veidot "darbības pierādījumus", kāpēc apgalvojums ir aplams.

Piemēru un pretpiemēru konstrukcijas prasmes pamatā ir apgalvojuma teksta un tā struktūras izpratne, tāpēc MLKT kursā pievēršama sevišķa uzmanība kvantoriem un loģiskajām operācijām, kurus satur vispārīgi izteikumi, kā arī izteikuma nolieguma konstrukcijai (Kurdyumova, 2001; Ryzhik, 2007; Buchbinder & Zaslavsky, 2014). Pretpiemēra jēdziens ieviešams pakāpeniski. Sākumā skolotāji dod gatavus paradoksus vai pretpiemērus, tad lūdz skolēniem izveidot savus pretpiemērus; visbeidzot, piedāvā noteikt, vai dotais matemātiskais apgalvojums ir patiess (Kachapova et al., 2007). Apgalvojuma patiesuma pārbaude pamatskolēniem padodas slikti (Sondore, Krastiņa, Daugulis, & Drelinga, 2016b; Sondore et al., 2018; Doruk & Doruk, 2022), jo ir jāizdomā pierādījums tam, ka apgalvojums ir patiess, vai arī jāizdomā pretpiemērs, lai pierādītu, ka apgalvojums ir aplams. Pretpiemēru meklēšana varētu kļūt par pirmo soli, uzsākot risinājuma pareizības pārbaudi (Komatsu, 2010; Horiguchi, & Hirashima, 2001). Ir svarīgi veidot paradumu savlaicīgi analizēt gan savas, gan skolēnu kļūdas (Sondore et al., 2016a). Skolotājiem tiek ieteikts radināt skolēnus kritiski izvērtēt informāciju, un izmēģināt taktiku- pašiem tīši pieļaut kļūdas nodarbībās, lai skolēni tās uzietu (Gruenwald & Klymchuk, 2003). Tas stimulētu skolēnus nepārtraukti sekot līdzi apgalvojumiem, novērtējot iegūto rezultātu ticamību.

Metodoloģija
Methodology

Tika veidots gadījuma pētījumu dizains (Mārtinsone & Pipere, 2011; Geske & Grīnfelds, 2006). Iesaistītie DU skolotāju programmās studējošie, ar tiesībām mācīt matemātiku 1.-6. klasei (N=25, pētījums veikts 2022. gada decembrī), rakstiski atbildēja uz aptaujas daļēji atvērtajiem jautājumiem, kas paredz izvēlei atbilžu variantus vai savas atbildes veidošanas iespēju (Mārtinsone & Pipere, 2011, 161). Nelielais respondentu skaits saistīts ar mazo sākumizglītības skolotāju programmās studējošo skaitu DU. Iegūto empīrisko datu analīzei un interpretācijai tika izmantotas gan kvalitatīvās, gan kvantitatīvās metodes.

Aptaujas daļēji atvērtajiem jautājumiem varēja izvēlēties atbilžu variantus (patiess vai aplams apgalvojums) ar papildus iespēju dot savu atbildi. Aptaujā bija trīs jautājumu bloki. Blokā A tika piedāvāti četri vispārīgi izteikumi, kuriem jāizvēlas patiesumvērtība, papildus- aplamam izteikumam jāuzraksta vai jāuzzīmē pretpiemērs. Blokā B bija jānorāda piemērs un pretpiemērs sešiem vispārīgiem izteikumiem. Kopumā no desmit izteikumiem puse bija par sadzīves situācijām, bet pārējie no pamatskolas matemātikas kursa (4 no algebras un viens no ģeometrijas). Abos jautājumu blokos tieši viens izteikums bija patiess. Doto izteikumu struktūra nebija pārāk sarežģīta, tika izmantoti kvantori "daži" un "visi", loģiskās operācijas- disjunkcija un konjunkcija. Blokā C bija prasība uzrakstīt desmit matemātiskus apgalvojumus, kurus varētu piedāvāt 1. - 6. klases skolēniem, lai viņi noteiktu apgalvojuma patiesumu.

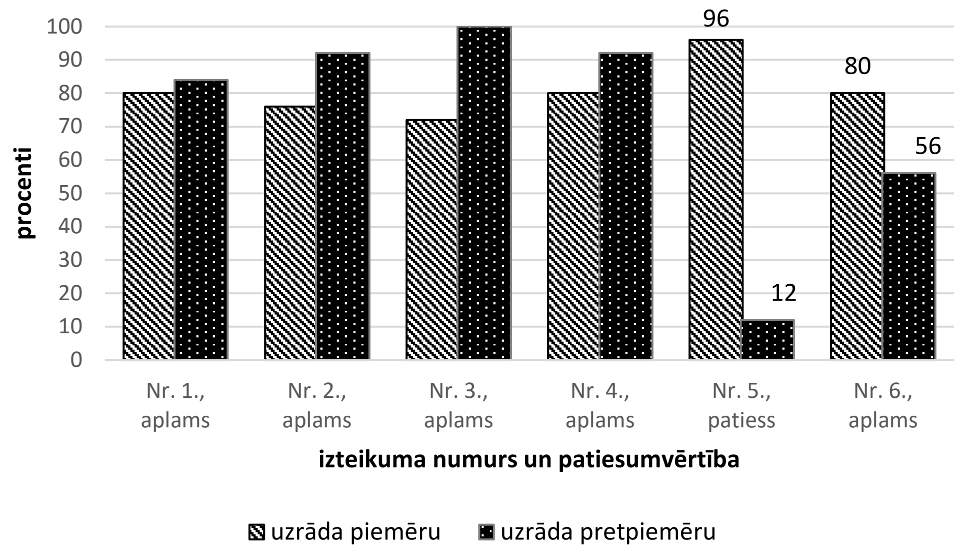
Tika veikta kvalitatīvā kontentanalīze Latvijas Ministru kabineta noteikumiem Nr. 747 par valsts pamatizglītības standartu un pamatizglītības programmu paraugiem (Ministru kabinets, 2018), ar kuriem skolu pedagogi uzsāka darbu 2020. gada septembrī, un Skola2030 (2019) materiāliem, lai konstatētu, kādas zināšanas un prasmes nepieciešams iekļaut MLKT kursā.

Pētījuma rezultātu analīze
Analysis of research results

Piemēru un pretpiemēru konstruēšana dotajiem apgalvojumiem nesagādā lielas grūtības topošajiem sākumizglītības skolotājiem. Tomēr termina "pretpiemērs" nosaukums rada problēmas to lietot, jo tika konstatēts kuriozs gadījums- pretpiemērs vietā izmanto vārdu perimetrs. Vispārīgam aplamam izteikumam bieži tika piedāvāti vairāki pretpiemēri, kas liecina, ka studējošajiem ir sajūta, ka viena pretpiemēra nepietiek. Tika nosaukti pat visi iespējamie pretpiemēri, ja to skaits bija galīgs, piemēram, izteikumam "Visu mēnešu nosaukumos ir burts i". Tāpat konstatējām tendenci, ka aplamam izteikumam pretpiemēra vietā lieto šī izteikuma noliegumu, kas nav atsevišķs izteikums. Tāpēc MLKT kursā iekļaujami vispārīgs un atsevišķs izteikums, izteikuma noliegums. Paskaidrosim, kā pretpiemēra konstatēšanai var izmantot izteikuma noliegumu. Apskatīsim vispārīgu izteikumu- jebkurai daudzskaitlīgai datu kopai tās vidējais aritmētiskais ir mazāks par maksimālo vērtību šajā datu kopā. Daudzi tam uzreiz piekrīt un nemeklē pretpiemērus. Apskatīsim šī izteikuma noliegumu- eksistē daudzskaitlīga datu kopa, kurai vidējais aritmētiskais ir lielāks vai vienāds par maksimālo vērtību datu kopā, un noteiksim tā patiesumvērtību. Acīmredzams ir fakts, ka vidējais nevar būt lielāks par maksimālo vērtību. Paliek jautājums, vai abi statistiskie rādītāji var būt vienādi. Diskusiju ceļā, uzrādot konkrētu piemēru, tiek konstatēts, ka noliegums ir patiess izteikums. Rodas konfliktsituācija, ka izteikumam un tā noliegumam ir vienādas patiesumvērtības. Tas palīdz saskatīt, ka piemērs, kas apstiprina nolieguma patiesumu der par pretpiemēru dotajam izteikumam.

Atbildēs uz bloka A un B jautājumiem vērojamas problēmas formulēt piemērus un pretpiemērus. Izteikumiem no bloka A ar vienkāršu teksta loģisko struktūru (izmantoti atslēgas vārdi- tikai, vai, daži) visi respondenti pareizi noteica patiesumvērtību. Bet sarežģītākas struktūras izteikumam no matemātikas "Jebkurš vesels skaitlis, kurš dala 10 bez atlikuma, ir pāra skaitlis" tikai 56% studentu pareizi noteica, ka tas ir aplams. No pretpiemēru atbildēm izriet, ka daudzi studenti neizprata terminus "dala" un "dalās", "pāra skaitlis". Piemēram, tika minēts pretpiemērs "10:2=5 (nepāra skaitlis un nav atlikuma)".

Bloka B aplamajiem izteikumiem (Nr.1.– 4.) biežāk tika rakstīti pretpiemēri nekā piemēri (1.att.). Tikai aplamam izteikumam Nr.6 - no trim sloksnītēm vienmēr var izveidot trijstūri, vairāk respondentu (80%) uzrādīja piemēru (biežāk minot vienādmalu trijstūri) nekā pretpiemēru (56% respondentu) (1.att.). Atzīmēsim, ka viens respondents deva vispārīgu piemēru un pretpiemēru (atbilst deduktīvo domāšanas spēju 5. līmenim, veidojot pretpiemērus matemātikā), rakstot, ka trijstūri varēs izveidot, ja jebkuru divu malu garumu summa ir lielāka nekā trešās malas garums.



1.attēls. ***Piemēra un pretpiemēra uzrādīšanas rezultāti bloka B izteikumiem*** *(autoru veidots)*
Figure 1 ***Example and counterexample recognition results for statements of block B*** *(made by the Authors)*

Kā redzams 1. attēlā, vienīgajam patiesam izteikumam Nr.5 no bloka B - saskaitot divus pāra skaitļus vienmēr iegūst pāra skaitli, 12% respondentu nenorādīja, ka nav pretpiemēru, vai piedāvāja savu pretpiemēru. Pretpiemērs "3+3=6" izteikumam Nr.5 no bloka B liecina, ka tiek mainīts dotais nosacījums, ka pretpiemērs jāmeklē starp pāra skaitļu summām. Pētījumā ir savākts kļūdaino pretpiemēru komplekts, kas būs noderīgs materiāls MLKT tēmai "Piemēri un pretpiemēri apgalvojuma patiesuma pamatošanai", jo kļūdaino atbilžu analīze var tikt izmantota stratēģijai mācāmies no kļūdām.

Blokā C ne visi iesniedza 10 apgalvojumus. Studējošiem grūti pašiem izveidot apgalvojumus dažādām klasēm (1. – 6.kl.) par matemātikas jēdzieniem, sakarībām, parādībām. Raksturīgākās kļūdas saistītas gan ar izteikuma jēdziena izpratni (jautājuma teikumi apgalvojuma teikumu vietā; apgalvojuma teikumi, kuros lieto vārdus "patīk", "skaists" u.tml., kas nav izteikumi, jo tiem nevar noteikt patiesumvērtību; definīcijas, kas nav izteikumi), gan ar pareizrakstību un apgalvojumu teksta pareizu konstrukciju.

No Latvijas izglītības sistēmas pilnveidei izstrādātajiem materiāliem izriet, ka piemēri un pretpiemēri ir aktuāli ne tikai matemātikā. Skolēni ir jāiedrošina analizēt notiekošos procesus, nepiekrītot kādam viedoklim un izsakoties kritiski, viņiem būtu jāargumentē, veidojot strukturētu tekstu, atsaucoties uz faktiem un likumiem, tātad uzrādot piemērus vai pretpiemērus (MK747, 2018; Skola 2030, 2019). Matemātikas mācīšanā kā primārā tiek izvirzīta prasmju apguve, kas jāstiprina ar izpratni par veikto darbību, lietoto simbolu, jēdzienu jēgu/nozīmi (Skola2030, 2019). Piemēru un pretpiemēru konstruēšana skolas matemātikas saturā parādās jau 1. – 3. klases posmā, taču nepieciešami ilgi priekšdarbi līdz skolēni nonāk pie apgalvojuma patiesuma pārbaudes. Sākumā tiek sasniegta prasme formulēt apgalvojumu pēc novērotā, praktiskām darbībām, aprēķiniem un spriedumiem, tad objektu salīdzināšanas un grupēšanas prasme, nosakot objektu kopīgās un atšķirīgās īpašības, pierakstīšanai izmantojot Eilera-Venna diagrammas. Sasniedzamo rezultātu aprakstā (skat. M.3.2.1.2.; M.3.2.1.4.; M.3.2.3.1.; M.3.2.3.2.) tiek uzsvērta prasme paskaidrot, kāpēc tā domā, noteikt atsevišķa apgalvojuma patiesumu, sakot "pareizi/nepareizi, uzrādot piemērus (arī tos, kas parāda, ka apgalvojums ir aplams) (MK747, 2018). Sasniedzamie rezultāti, beidzot 6.klasi (M.6.2.1.3.; M.6.2.3.1.; M.6.2.3.3.) - veido un pārbauda vispārinājumus, aplūkojot atsevišķus gadījumus, vai spriež vispārīgi, nosaka objektu ar noteiktām īpašībām (ne vairāk kā divām) eksistenci, skaitu, demonstrējot izpratni par nolieguma, vārdu "eksistē", "katrs", saikļu "un", "vai", "vai nu, vai" lietojumu. Uzsvērta pretpiemēru konstrukcija jaunā situācijā, saistot to ar zināmo, kā arī apgalvojuma patiesuma izvērtēšana, piemēram, "taisnstūriem ar vienādiem perimetriem arī laukumi ir vienādi" (MK747, 2018).

Svarīgi studējošiem akcentēt pakāpenisku pāreju uz citādu skolēnu mācību pieredzi un citādu metodisko paņēmienu izmantošanu pilnveidotā mācību satura apguvei, kas ir atšķirīga no pašu studējošo skolas mācību pieredzes. Lai nodrošinātu mūsdienīgas lietpratības izglītību, būtiski nodrošināt topošajiem skolotājiem iespēju plānot un vadīt mācīšanos, izvirzīt skaidrus sasniedzamos rezultātus, izvēlēties atbilstošus uzdevumus, veikt pašvērtējumu.

Secinājumi
Conclusions

Pilnveidotais Latvijas pamatizglītības matemātikas standarts liecina, ka jau 1.klasē tiek ieviesta piemēru un pretpiemēru konstruēšana. Šī valoddarbības prasme noder izpratnes veidošanai par jēdzieniem, sakarībām, to būtiskākajām īpašībām, apgalvojuma patiesuma noteikšanai. Nepieciešami ilgi priekšdarbi līdz skolēni nonāk pie apgalvojuma patiesuma izvērtēšanas prasmes apgūšanas, beidzot 6.klasi.

Pilotpētījums rāda, ka prasme veidot piemērus un pretpiemērus dotajiem izteikumiem nesagādā lielas grūtības topošajiem sākumizglītības skolotājiem, taču studentiem daudz grūtāk pašiem izveidot izteikumus ar matemātisku saturu 1.-6. klasei. Analizējot respondentu atbildes, pārliecinājāmies, ka piemēru un pretpiemēru konstruēšanas prasmes apgūšanai aktuālas vairākas "Matemātiskās loģikas un kopu teorijas elementi" kursa tēmas:

- izteikuma jēdziens un tā patiesumvērtība, akcentējot izteikumu ar matemātisku saturu veidošanu,
- nolieguma konstrukcija saliktiem izteikumiem ar kvantoriem,
- izteikumu loģikas formulu izmantošana izteikuma struktūras analīzei.

Pētījuma gaitā apkopojām studējošo atbildes un ieteikumus no citiem pētījumiem par piemēru un pretpiemēru izmantošanu mācību procesā. Tas deva ierosmi "Matemātiskās loģikas un kopu teorijas elementi" kursā pievienot atsevišķu tēmu "Piemēri un pretpiemēri apgalvojuma patiesuma pamatošanai". Svarīgi piedāvāt uzdevumus, kas saistīti ar pamatizglītības sasniedzamajiem rezultātiem noteiktos posmos (1. – 3.kl, 4. – 6.kl.), un papildus skaidrot, ka pietiek ar vienu pretpiemēru, kas pamato izteikuma aplamību. Savāktie materiāli ar kļūdainiem pretpiemēriem tiks izmantoti stratēģijai mācāmies no kļūdām.

Summary

The improved Latvian primary education mathematics standard, with which teachers started work in September 2020, shows that already in grades 1-6 the construction of examples and counterexamples is introduced. This linguistic skill is useful for creating an understanding of concepts, relationships, their most essential properties, and determining the truth value of a statement. Many authors have addressed the role of mathematical logic in the formation of students' thinking skills (classify, analyze, concretize, conclude, etc.) already at an early school age. A counterexample is understood as a separate statement that proves that the general statement is not true, so counterexamples help to better understand both definitions and conditions given in theorems. The construction of examples and counterexamples is based on understanding the structure of the statement text.

A new study course "Elements of Mathematical Logic and Set Theory" is included in the content of the Professional Bachelor's degree in Teacher Education (with the right to teach mathematics in grades 1-6). In order to outline what content questions should be included in this course, a case study design was created. Students in DU teacher programs, (N=25, the study was conducted in 2022), answered questions from three blocks (A, B, C) with multiple-choice

answers, and also created mathematical statements themselves, which could be offered to 1st-6th graders to determine the truth value of the statement.

The pilot study shows that the ability to create examples and counterexamples to the given statements does not cause great difficulties for the future primary education teachers, but it is much more difficult for students to create statements with mathematical content on their own in grades 1-6. for the class. Analyzing the respondents' answers, we certified that several topics of the "Elements of Mathematical Logic and Set Theory" course are relevant for learning the skill of constructing examples and counterexamples:

- the concept of a statement and its truth value, emphasizing the creation of statements with mathematical content,
- negation construction for compound statements with quantifiers,
- use of logic formulas for analysis of statement structure.

In the research, we collected student responses and recommendations from other studies on the use of examples and counterexamples in the learning process. This prompted the addition of a separate topic "Examples and counterexamples for verifying the truth of a statement" in the course "Elements of Mathematical Logic and Set Theory". It is important to offer tasks related to the planned results of primary education in certain stages (grades 1 - 3, 4 - 6), and to additionally explain that one counterexample is sufficient to justify the incorrectness of the statement. The collected materials with erroneous counterexamples will be used for the strategy of learning from mistakes.

Literatūra
References

Amirudin, M., Fuad, Y., & Wijayanti, P. (2018). Students' Proof Schemes for Disproving Mathematical Proposition. *Proceedings of the Mathematics, Informatics, Science, and Education International Conference (MISEIC 2018). Advances in Intelligent Systems Research (AISR), 157*, 101-105. DOI: 10.2991/miseic-18.2018.25

Buchbinder O., & Zaslavsky, O. (2014). A Holistic Approach for Designing Tasks that Capture and Enhance Mathematical Understanding of a Particular Topic: The Case of the Interplay between Examples and Proof. In C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22,* (25-33). Oxford. Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/299346753_A_Holistic_Approach_for_Designing_Tasks_that_Capture_and_Enhance_Mathematical_Understanding_of_a_Particular_Topic_The_Case_of_the_Interplay_between_Examples_and_Proof

Cīrulis, J. (2007). *Matemātiskā loģika un kopu teorija*. Rīga: Zvaigzne ABC.

Doruk, M., & Doruk, G. (2022). Students' ability to determine the truth value of mathematical propositions in the context of operation meanings. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(4), 753-786. DOI: 10.1080/0020739X.2020.1782494

Geske, A., & Grīnfelds, A. (2006). *Izglītības pētniecība.* Rīga: LU Akadēmiskais apgāds.

Gruenwald, N., & Klymchuk, S. (2003). Using counter-examples in teaching calculus. *The New Zealand Mathematics Magazine, 40* (2), 33-41. Retrieved from:

https://openrepository.aut.ac.nz/bitstream/handle/10292/8392/Using%20Counter-Examples%20in%20Teaching%20Calculus-NZMM-2003-pre-publication.pdf?sequence=4&isAllowed=y

Horiguchi, T., & Hirashima, T. (2001). The Role of Counterexamples in Discovery Learning Environment: Awareness of the Chance for Learning. In T. Terano, Y. Ohsawa, T. Nishida, A. Namatame, S. Tsumoto, T. Washio (Ed.), *New Frontiers in Artificial Intelligence*. *JSAI 2001*. *Lecture Notes in Computer Science*, *2253*, (468-474). Berlin, Heidelberg: Springer. DOI:10.1007/3-540-45548-5_64

Kachapova, F., Black, M., Klymchuk, S., & Kachapov, I. (2007). Counter-Examples and Paradoxes in Teaching Mathematical Statistics: A Case Study. *Mathematics Teaching-Research Journal On-Line*, *2*(1), 1-12. Retrieved from: https://commons.hostos.cuny.edu/mtrj/wp-content/uploads/sites/30/2018/12/v2n1-Counterexamples-Paradoxes-Sergiy.pdf

Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*, 1-10. Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/223359741_Counter-examples_for_refinement_of_conjectures_and_proofs_in_primary_school_mathematics

Kurdyumova, N. A. (2001). Vse i nekotorye na odnom uroke. *Matematika v shkole. 1*, 34-35.

Mārtinsone, K., & Pipere. A. (2011). *Ievads pētniecībā: stratēģijas, dizaini, metodes*. Rīga: RAKA.

Mencis, J., & Kumerdanka, A. (2021). *Sasniedzamais rezultāts matemātikā – prasme*. Rīga: Latvijas Universitāte.

Ministru kabinets. (2018). *Noteikumi par valsts pamatizglītības standartu un pamatizglītības programmu paraugiem.* Ministru kabineta noteikumi Nr. 747. Pieejams: https://likumi.lv/ta/id/303768-noteikumi-par-valsts-pamatizglitibas-standartu-un-pamatizglitibas-programmu-paraugiem

Nodelman, V. (2018). Counterexamples in Mathematics Education: Why, Where, and How?--Software aspect. *Electronic Journal of Mathematics and Technology*, *12(3),* 342+. *Gale Academic OneFile*, Retrieved from: https://go.gale.com/ps/i.do?id=GALE%7CA673463248&sid=googleScholar&v=2.1&it=r&linkaccess=abs&issn=19332823&p=AONE&sw=w&userGroupName=anon%7E824f0202

NMS. (2022). Piemērs un pretpiemērs. Teorija un piemēri 5.-9. klasei, gatavojoties Novada olimpiādei 2021./2022. m.g. Pieejams: https://www.nms.lu.lv/fileadmin/user_upload/lu_portal/projekti/nms.lu.lv/Teorija/Olimpiazu/Piemers_pretpiemers_5-9_klase_2022.pdf

Ryzhik, V. I. (2007). Logika v shkolnom matematicheskom obrazovanii. *Matematika v shkole. 3*, 39-47; *4*, 29-37.

Semadeni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics*, *4(1),* 32-34. Retrieved from: https://www.flm-journal.org/Articles/7DE6E459B48131C6FD31327F97E5B.pdf

Skola2030. (2019). Pieejams: https://www.skola2030.lv

Sondore, A., Krastiņa, E., Daugulis, P., & Drelinga, E. (2016a). Understanding of basic concepts for mastering competences of school mathematics. *Proceedings of the International Scientific Conference "Society. Integration. Education".* Volume II, May 27-28. Rezekne: Rezeknes Academy of Technologies, 330-342. Retrieved from: http://journals.ru.lv/index.php/SIE/article/view/1383

Sondore, A., Krastiņa, E., Daugulis, P., & Drelinga E. (2016b). Usage of logical connectives in school mathematics. In M. Lepik (Ed.), *Proceedings of the 17th International Conference*

"Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives", 123-131, Tallinn: Tallinn University.

Sondore, A., Krastiņa, E., Daugulis, P., & Drelinga, E. (2018). Construction of negations in the context of critical thinking for primary school. *Proceedings of the International Scientific Conference "Society. Integration. Education".* Volume II, May 25-26, 454-463, Rezekne: Rezeknes Academy of Technologies.

Zaskis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary. *Educational Studies in Mathematics*, *68,* 195-208. DOI:10.1007/s10649-007-9110-4

Widjaja, W., & Vale, C. (2021). Counterexamples: challenges faced by elementary students when testing a conjecture about the relationship between perimeter and area. *Journal on Mathematics Education*, *12(3),* 487-506. Retrieved from: https://www.researchgate.net/publication/356495788_COUNTEREXAMPLES_CHALLENGES_FACED_BY_ELEMENTARY_STUDENTS_WHEN_TESTING_A_CONJECTURE_ABOUT_THE_RELATIONSHIP_BETWEEN_PERIMETER_AND_AREA