

# SKAITLISKO DATU IZKĀRTOŠANAS DAUDZVEIDĪBA DZILĀKAI MATEMĀTIKAS IZPRĀTNEI

## *Variety of Arrangements of Numerical Data for a Deeper Understanding of Mathematics*

**Pēteris Daugulis**

Daugavpils University, Latvia

**Elfrīda Krastiņa**

Daugavpils University, Latvia

**Anita Sondore**

Daugavpils University, Latvia

**Vija Vagale**

Daugavpils University, Latvia

**Abstract.** *Effective arranging of numerical data and design of associated computational algorithms are important for any area of mathematics for teaching, learning and research purposes. Usage of various algorithms for the same area makes mathematics teaching goal-oriented and diverse. Matrices and linear-algebraic ideas can be used to make algorithms visual, two dimensional (2D) and easy to use. It may contribute to the planned educational reforms by teaching school and university students deeper mathematical thinking. In this article we give novel data arranging techniques (2D and 3D) for matrix multiplication. Our 2D method differs from the standard, formal approach by using block matrices. We find this method a helpful alternative for introducing matrix multiplication. We also give a new innovative 3D visualisation technique for matrix multiplication. In this method, matrices are positioned on the faces of a rectangular cuboid. Computerized implementations of this method may be considered as student project proposals.*

**Keywords:** *block matrix, data arranging, linear algebra, mathematics education, matrix multiplication, rectangular cuboid, scalar product.*

### **Ievads**

#### ***Introduction***

Apgūstot matemātiku, īpaši pamatjēdzienus un pamatoperācijas, vēlams izkārtot skaitļus un citus skaitliskus objektus tā, lai izkārtošanas veids padziļinātu uztveri un mācīšanos, lai skaitļošana būtu izzinoša un ērta (Sondore, Krastiņa, Daugulis, & Drelinga, 2016).

Svarīgi pievērst uzmanību tam, vai studējošie prot pamatot algoritma soļus. Tas nozīmē mācīšanos iedziļinoties, kas tagad ir aktualizēta Latvijā, īstenojot izglītības reformu (Skola2030, 2019; KM, 2018). Mācīšanās iedziļinoties paredz ne tikai skolēnu izpratni par vispārējiem principiem un paņēmieniem problēmu risināšanā, bet arī spēju atpazīt, kad, kā un kāpēc var izmantot apgūtās zināšanas un prasmes attiecīgajā jomā (NRC, 2012).

Skaitlisko datu izkārtojuma analīze un maiņa attīsta spēju vispārināt un pārnest iegūtās zināšanas un prasmes jaunās situācijās. Tas ir aktuāli, jo OECD PISA 18 rezultāti liecina, Latvijā joprojām ir relatīvi maz skolēnu ar augstiem sasniegumiem (8,5%), kas ir mazāks par OECD valstu vidējo rādītāju - 10,9% (Kangro & Kiseļova, 2019). Tāpēc Latvijas matemātiskās izglītības sabiedrībai ir jāuztur nepārtraukts izglītības uzlabošanas process, sevišķi uzmanība jāpievērš darbam ar labiem un izciliem skolēniem visās satura jomās (Kangro & Kiseļova, 2019). Pārskatāmi algoritmi ir noderīgi gan skolēniem, kuriem galvas rēķini vai citas mentālās operācijas sagādā grūtības, gan kopumā sekmē augstākus mācību rezultātus.

Šī raksta mērķis ir parādīt dažādas datu izkārtošanas iespējas tādā svarīgā matemātikas operācijā kā matricu reizināšana, parādīt iespējas veikt inovācijas mācību procesā, dažādojot skaitlisko datu izkārtošanu.

Autori piedāvā divas inovatīvas matricu reizināšanas metodes - *matricu stūra metodi* (Daugulis & Sondore, 2017) un *paralēlskaldņa metodi*, pie kurām var nonākt, ja izmaina datu izkārtošanu uz izteikti divdimensionālu (2D) un trīsdimensionālu (3D) veidu.

**Pētījuma metodoloģija.** Darbā tika izmantota mācību un zinātniskās literatūras analīze un interpretācija, darbības pētījuma metodes (Mārtinsons, Pipere, & Kamerāde, 2016) – inovatīvas metodikas izstrāde un aprobācija, studentu novērojumi nodarbībās, studentu darbu analīze, pārrunas ar kolēģiem, pašpieredzes analīze. No 2014.gada līdz 2019.gadam DU matemātikas studiju programmu kursā „Lineārā algebra” tika integrētas jaunas metodiskas idejas un veikti ar tām saistīti darbības pētījumi, kuru rezultāti ir daļēji aprakstīti šajā darbā.

Raksta mērķauditorija ir skolotāji un augstskolu docētāji.

## **Datu izkārtošanas veidi** *Arrangements of data*

Atkarībā no skaitlisko objektu un modeļu dabas, skaitliskie dati var tikt izkārtoti 1D, 2D, 3D vai grafu veidā. Vēsturiski pirmie simbolu un datu izkārtošanas veidi ir bijuši 1D. Uz 1D izkārtojumiem balstās dažādi skaitļu pieraksti – gan pozicionālie, gan arī nepozicionālie. Izkārtojot 1D veidā, bieži ir vēlams datus sakārtot neaugošā, nedilstošā vai kādā citā dabiskā secībā. Arī datu

izkārtošanu pa apli var uzskatīt par 1D izkārtojumu. Tiek lietotas leksikogrāfiskās secības, kas ļauj viennozīmīgi uzdot kopas un multikopas.

Matemātikas tālāka attīstība noveda pie 2D algoritmiem un ar to saistītām datu izkārtošanas metodēm. Cilvēki pierakstiem vienmēr ir izmantojuši 2D priekšmetus un materiālus – priekšmetu virsmas, papīra lapas u.c. Mehāniskajās skaitļošanas ierīcēs – skaitīkļos (abacus) skaitāmie kauliņi tika ievietoti vairākos paralēlos taisnos stienos (Agarwal & Sen, 2014). Aritmētisko darbību algoritmos dati tiek izkārtoti 2D veidā. Veselo skaitļu teorijā atlikumus fiksētā modulim var izkārtot pa apli (atlikumu apli) un, veicot aritmētiskās operācijas, izmantot dažādas 2D simetrijas.

Datu 2D izkārtojumu daudzveidība aritmētiskajās operācijās ir zināma jau vairākus gadsimtus. Kā piemēru minēsim divus veselu skaitļu reizināšanas algoritmus. Vispārzināms un populārs ir veselu skaitļu reizināšanas algoritms "reizināšana stabiņā" (angl. -long multiplication), bet Latvijā mazāk lieto "matricas algoritmu" (angl. - lattice multiplication), kurā aprēķinu veikšanai 2D struktūras tiek izmantotas tiešāk, nekā izpildot "reizināšanu stabiņā". Matricas algoritms ir publicēts jau arābu matemātiķu darbos 13.gs. beigās (Boag, 2007). Šī algoritma pozitīva iezīme ir tāda, ka starprezultāti tiek neatkarīgi atrasti kā vairāku vienciparu skaitļu reizinājumi. „Reizināšana stabiņā” ir kļuvusi populāra, iespējams, tāpēc, ka datu izkārtojums tajā ir līdzīgs datu izkārtojumiem citu aritmētisko operāciju algoritmos. Autori uzskata, ka skolēnus vēlams iesaistīt meklējuma darbībā un iepazīstināt ar vairākiem reizināšanas un citu aritmētisko operāciju algoritmiem jau 3.-4.klasē.

Piezīmēsim, ka tabulas tiek izmantotas arī zināmajā polinomu reizināšanas algoritmā, kurā tabulas rūtiņās tiek ierakstīti visi savstarpējie termu reizinājumi. Šis algoritms palīdz tos nepazaudēt un sakārtot.

Arī lineārā algebra balstās uz datu 2D izkārtošanu. Lineārās algebras pamatobjekts ir matrica. Matricās izkārtoti objekti, kas ir atkarīgi no diviem diskrētiem indeksiem, jo šī izkārtojuma pamatā ir divu kopu Dekarta reizinājuma elementu identificēšana ar tabulas elementiem. Skolas matemātikas kursā šādas tabulas tiek plaši izmantotas dažādiem nolūkiem – no reizrēķinu tabulas līdz objektu klasifikāciju tabulām, tabulas visu gadījumu izsmelšanai pārlasei, dažādu algoritmu vizualizācijai, piemēram, kombinatorikas reizinājuma likuma apguvei.

Ideja par datu izkārtošanu 3D veidā ir mazāk populāra, jo to realizēt ir tehniski grūti. 3D izkārtošana nozīmētu datu izvietojumu uz 3D objektu (piemēram, daudzskaldņu) virsmas vai caurspīdīgos 3D priekšmetos. 3D izkārtošana var būt vieglāk realizējama virtuāli uz datorierīču ekrāniem. Datu 3D izkārtošana un skaitļošanas algoritmu interpretācija šādiem izkārtojumiem var parādīt dažas šo algoritmu iezīmes, kas ir grūtāk saskatāmas, izmantojot 2D izkārtojumu.

Skaitliskie dati var tikt izkārtoti arī uz grafu virsotnēm un šķautnēm. To var darīt tajās situācijās, kad ir jāparāda komplicētākas attiecības starp elementārajām datu vienībām, kas tiek iekodētas grafu virsotnēs un šķautnēs. Grafiskā un 2D izkārtošanas ir saistītas ar grafu-matricu atbilstību, skat. (Daugulis, 1998), ko izmanto lineārajā algebrā. Grafus sāka plaši lietot tikai 18.gs., mūsdienās iepazīšanās ar grafiem notiek jau 1.klasē.

Dažādi netriviāli skaitļu un ģeometrisku objektu izkārtojumi plaknē ir bieži sastopama iezīme nestandarta (matemātikas konkursu) uzdevumu formulējumos un risinājumos. Piemēram, populāri ir uzdevumi, kur jāprot izveidot turnīru tabulas kā matricas un tad tās analizēt, skat. A. Liepas Neklātienes matemātikas skolas mājaslapu (<http://nms.lu.lv>). Spēja izmantot piemērotas risināšanas stratēģijas ir svarīga skolēnu matemātiskās kompetences iezīme, skat. (Sondore, Krastiņa, Daugulis, & Drelinga, 2017).

### **Matricu reizināšanas metode ar datu izkārtošanu bloku veidā** *A matrix multiplication algorithm with data arranged as blocks of a bigger matrix*

Matricu reizināšana ir lineārās algebras pamatoperācija, skat. (Blyth & Robertson, 2002). Tā tiek izmantota, lai aprēķinātu lineāru attēlojumu kompozīciju un to darbību uz lineāro telpu elementiem. Matricu reizināšana tiek izmantota arī citās matemātikas apakšdisciplīnās – analītiskajā ģeometrijā, grafu teorijā u.c. Matricu reizināšanu izmanto klasiskā Eiklīda algoritma apgūšanā. Tādējādi, matricu reizinājuma labāka apguve uzlabos spējas pielietot matemātiku citās nozarēs un pārnēs zināšanas jaunās situācijās.

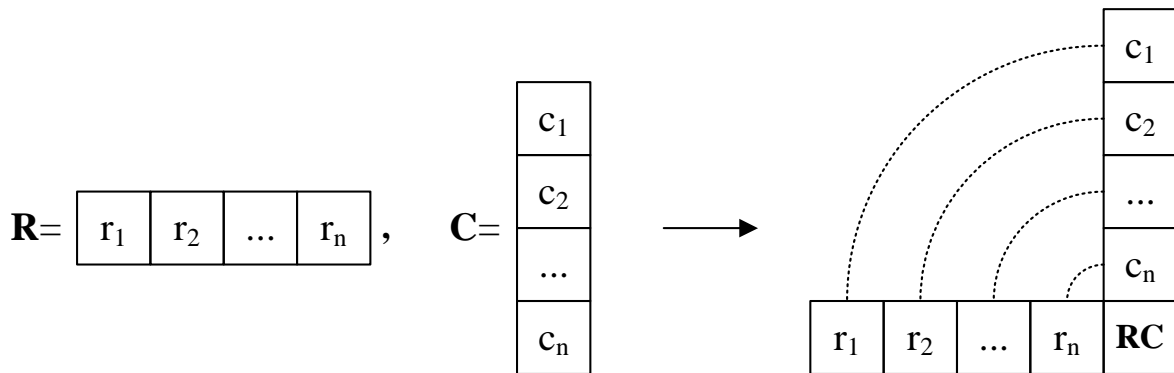
Matricu reizināšanas operācija ir sen standartizēta un joprojām tiek izmantota bez izmaiņām augstskolu mācību grāmatās (Andrilli & Hecker, 2003; Curtis, 1984, Šteiners & Siliņa, 1997), kur matricu reizināšana tiek definēta formālā veidā – reizinājuma elementi tiek rēķināti neatkarīgi viens no otra kā noteiktas summas. Šo tradicionālo metodi var uzskatīt par 1D metodi, jo tajā reizinātāju un reizinājumu matricas netiek iekļautas vienā aptverošā struktūrā.

Autori izklāsta matricu reizināšanas metodi, kas ir uzskatāmāka un sniedz dziļāku lineārās algebras izpratni – matricu stūra metodi, skat. (Daugulis & Sondore, 2017). Šo metodi var uzskatīt par 2D metodi, jo reizinātāji un reizinājums tiek izkārtoti kā lielākas matricas bloki. Matricu stūra metodei ir vairākas priekšrocības, salīdzinot ar tradicionālo. Bloku izmēri ļauj vizuāli viegli noteikt, vai reizinājums ir definēts. Ja reizinājums ir definēts, tad doto matricu reizinājums ir kāds no šīs lielākās matricas blokiem. Metode atvieglo reizinājuma elementu aprēķināšanu rindu, kolonnu vai bloku kārtībā. Matricu stūra metode ļauj apgūt matricu un skalāro reizinājumu vienotā veidā. Divu matricu reizināšana abās iespējamās secībās var tikt vizualizēta ar vienu attēlu.

Līdzīgi attēli ir publicēti dažos avotos (Strazdiņš, 1980; Matrix-Matrix Multiplication on the GPU with Nvidia CUDA, 2019), taču līdz šim publikācijās attēli nav bijuši tieši saistīti ar algoritmiem, mācību grāmatās netiek izmantoti un nav vispārzināmi.

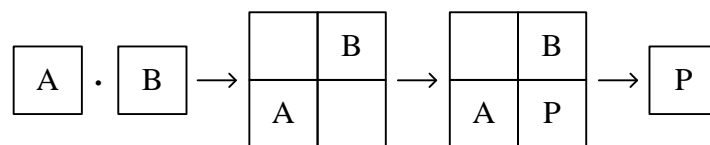
Vispirms apskatīsim speciālgadījumu - rindas matricas un kolonnas matricas reizinājumu. Rindas matricas  $R$  (izmēri  $1 \times n$ ) reizinājums ar kolonnas matricu  $C$  (izmēri  $m \times 1$ ) ir definēts tad un tikai tad, ja  $n=m$ . Tad šo matricu reizinājums  $RC$  pēc tradicionālās definīcijas ir šāda elementu reizinājumu summa:  $RC=r_1c_1+ r_2c_2+\dots r_nc_n$ .  $RC$  var uzskatīt arī par divu vektoru  $R^T$  (transponēts  $R$ ) un  $C$  skalāro reizinājumu.

Reizinājumu  $RC$  var izkārtot, kā parādīts 1.attēlā, skat arī (Blyth & Robertson, 2002). Liektās punktlīnijas parāda, kādi elementi jā sareizina.



1.attēls. Rindas matricas  $R$  un kolonnas matricas  $C$  izkārtojums stūra metodē  
 Figure 1 Row-column product  $RC$  in the matrix corner method

Ja dota  $m \times n$  matrica  $A$  un  $s \times r$  matrica  $B$ , tad, lai aprēķinātu reizinājumu  $AB$ , no sākuma tiek izveidota bloku matrica – matricu stūris, kas sastāv no 4 blokiem. Bloku matrica satur  $A$  un  $B$  kā, attiecīgi, apakšējo kreiso un augšējo labo stūri. Ja bloku matricas augšējais kreisais stūris pēc izmēriem nav kvadrāts, tad reizinājums  $P=AB$  nav definēts. Ja tas ir kvadrāts, tad  $P$  ir definēts, un tā izmēri ir vienādi ar apakšējā labā bloka izmēriem. Matricas  $P$  elementi tiks ierakstīti apakšējā labajā blokā. Matricu  $A$  un  $B$  stūris ir parādīts 2.attēlā.



2.attēls. Matricu stūra konstrukcijas shēma reizinājuma  $P=AB$  aprēķināšanai  
 Figure 2 Construction process of the matrix corner for the product  $P=AB$

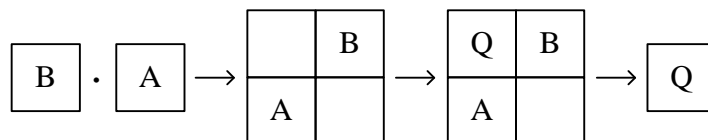
Matricas P elements  $p_{ij}$  tiek aprēķināts, sareizinot A-rindu un B-kolonnu, kas iet caur šo elementu, skat. 3.attēlu, punktlīnijas norāda, kādi elementi jā sareizina savā starpā.

			$b_{11}$	...	$b_{1j}$	...	$b_{1r}$
			...	...	...	...	...
			$b_{n1}$	...	$b_{nj}$	...	$b_{nr}$
$a_{11}$	...	$a_{1n}$	$p_{11}$	...	$p_{1j}$	...	$p_{1r}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$a_{i1}$	...	$a_{in}$	$p_{i1}$	...	$p_{ij}$	...	$p_{ir}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$a_{m1}$	...	$a_{mn}$	$p_{m1}$	...	$p_{mj}$	...	$p_{mr}$

3.attēls. *Reizinājuma AB elementu aprēķināšana*  
 Figure 3 *Computation of elements of the matrix product AB*

Ar matricu stūra metodi, izmantojot vienu attēlu, var aprēķināt arī vairāku matricu reizinājumu.

Reizinājumu  $Q=BA$  var definēt līdzīgā veidā, tikai mainās 2.attēla augšējā kreisā un apakšējā labā bloka lomas, skat. 4.attēlu.



4.attēls. *Matricu stūra konstrukcijas shēma reizinājuma  $Q=BA$  aprēķināšanai*  
 Figure 4 *Construction process of the matrix corner for the product  $Q=BA$*

Reizinājuma  $Q=BA$  elements  $q_{ij}$ , (augšējā kreisajā blokā), ir vienāds ar B-rindas un A-kolonnas, kas iet caur šo elementu, reizinājumu, skat. 5.attēlu.

$q_{11}$	...	$q_{1j}$	...	$q_{1n}$	$b_{11}$	...	$b_{1m}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$q_{i1}$	...	$q_{ij}$	...	$q_{in}$	$b_{i1}$	...	$b_{jm}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$q_{s1}$	...	$q_{sj}$	...	$q_{sn}$	$b_{s1}$	...	$b_{sm}$
$a_{11}$	...	$a_{1j}$	...	$a_{1n}$			
...	...	...	...	...			
$a_{m1}$	...	$a_{mj}$	...	$a_{mn}$			

5.attēls. *Matricu stūra metode reizinājumam BA*  
 Figure 5 *The matrix corner method for the product BA*

Piemērs. Aprēķināt reizinājumu AB un BA, ja tie ir definēti. Matricas A un B ir dotas 6.attēlā.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

6.attēls. *Piemēra matricas*  
 Figure 6 *The matrices of the example*

Izkārtojam matricas A un B matricu stūra veidā. Ar skaitļiem neaizpildītās bloku matricas ir kvadrātiskas, tātad abi reizinājumi AB un BA ir definēti, skat. 7.attēla kreisās puses matricu. Aprēķinām matricu elementus kā atbilstošo rindu un kolonnu reizinājumus, rezultātus rakstot attiecīgajos blokos, skat. 7.attēla labās puses matricu.

		1	2	3			-1	1	1	2	3
		-1	2	4			-7	1	-1	2	4
3	-1				3	-1	4	4	5		
-2	4				-2	4	-6	4	10		
0	-2				0	-2	2	-4	-8		

7.attēls. *Piemēra matricu stūris*  
 Figure 7 *The matrix corner for the example*

Atbildes ir parādītas 8.attēlā.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ -6 & 4 & 10 \\ 2 & -4 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$$

8.attēls. *Piemēra atbildes*  
 Figure 8 *The answers for the example*

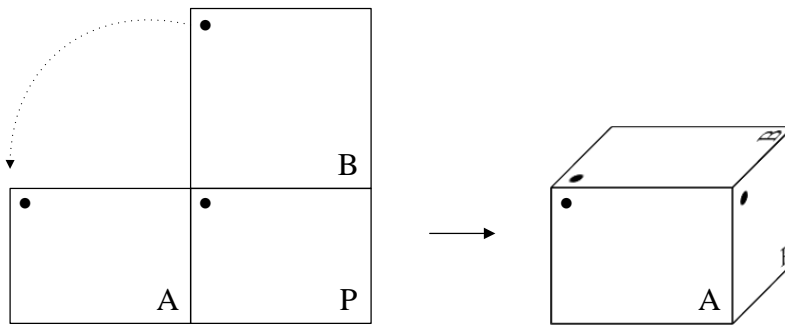
Matricu stūra metode var uzlabot lineārās algebras izpratni. Matricu reizināšana iekodē lineāru attēlojumu darbību uz lineāro telpu elementiem: ja A ir lineārs attēlojums, kas darbojas uz vektoru x, tad vektors Ax atrodas tieši zem vektora x, ja tiek izmantota matricu stūra metode. Ja ir jāpēta A darbība uz vairākiem vektoriem, kas ir izkārtoti kā matricas B kolonnas, tad vektoru un to A-attēlu atrašanās vienā lielā matricā padara šo analīzi uzskatāmu. Šī metode ļauj ērti aprēķināt tikai izvēlētus reizinājuma matricas blokus. Vēl viena lietderīga iezīme ir tā, ka matricu stūra metode ļauj vieglāk noteikt, vai A un B ir komutējošas matricas, pētot vienas matricas divus blokus. Par matricu stūra metodes negatīvu iezīmi var uzskatīt to, ka tai ir nepieciešams vairāk vietas salīdzinot ar klasisko metodi.

Autori izmanto matricu stūra metodi darbā ar matemātikas un IT studiju programmu studentiem, tā ir vizuāla un ērta studentiem, kuriem dominē vizuālā uztvere. Šī metode tiek mācīta kopā ar matricu reizinājuma definīciju kā tā aprēķināšanas praktisks algoritms. Rakstā dotie attēli tiek izmantoti, lai paskaidrotu matricu stūra metodes algoritmu. Darbības pētījums apliecina, ka matricu stūra metodi ieteicams izmantot lineārās algebras ievadkursā.

**Matricu reizināšanas metode ar datu 3D izkārtošanu uz paralēlskaldņa virsmas**  
*A matrix multiplication method with 3D data arrangement on a cuboid surface*

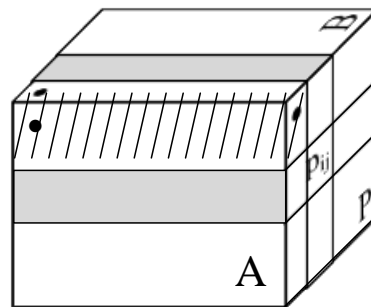
Autori piedāvā arī matricu stūra metodes pārnesei 3D formā, kurā matricu reizinātāji tiek izkārtoti uz paralēlskaldņa virsmas – paralēlskaldņa metodi. Pieņemsim, ka ir dotas matricas A un B, kuru reizinājums  $P=AB$  ir definēts. Matricu A, B un P, kā tās izvietotas matricu stūra metodē, augšējos kreisos stūrus apzīmēsim ar punktiem. Salokām šo matricu stūri, kā parādīts 9.attēlā, lai izveidojas paralēlskaldnis.





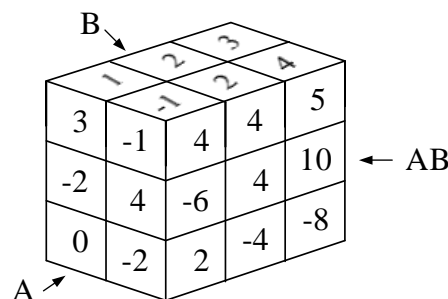
9.attēls. *Matricu stūra salocīšana reizinājumam AB*  
 Figure 9 *The matrix corner folding for the product AB*

Ievērosim, ka pēc salocīšanas A-rindas ir paralēlas B-kolonnām. Matricu reizinājuma  $P=AB$  elements  $p_{ij}$  ir vienāds ar tam atbilstošo paralēlo A un B apakšmatricu (iekrāsotas pelēkā krāsā) reizinājumu, skat. 10.attēlu.



10.attēls. *Reizinājuma AB elementu aprēķināšana ar paralēlskaldņa metodi*  
 Figure 10 *The computation of AB-elements with the cuboid method*

Arī reizinājumu BA var atrast, salokot atbilstošo matricu stūri.  
 Piemērs. Iepriekšējās sadaļas piemēra aprēķināšana ar paralēlskaldņa metodi ir parādīta 11.attēlā.



11.attēls. *Piemēra matricu reizinājuma paralēlskaldnis*  
 Figure 11 *The cuboid for the example*

Kā paralēlskaldņa metodes pozitīvu iezīmi, var atzīmēt faktu, ka reizinājuma matricas elementi ir paralēli izvietotu apakšmatricu reizinājumi. Šī metode nav ērta praktiskai lietošanai, tā ir dota kā piemērs, kurā ir inovatīva 3D datu izkārtošana. To var realizēt ar datorprogrammu palīdzību, kas attēlo paralēlskaldņus uz datorierīces ekrāna.

## **Diskusija** *Discussion*

Matemātikā, tāpat kā citos mācībuursos skolā un augstskolā, ir akcentējama pieeja, ka vienu problēmu var atrisināt vairākos veidos, izmantojot dažādus datu izkārtojumus un algoritmus. Tas ir vēlams vairāku iemeslu dēļ. Dažādi risināšanas veidi var būt lietderīgi dažādos speciālgadījumos. Matemātikā un citos mācību priekšmetos ir vēlami pārskatāmi, vizualizēti algoritmi, kas ir noderīgi skolēniem, kuriem galvas rēķini vai citas mentālās operācijas sagādā grūtības. Ir pastāvīgi jāseko pasaulē notiekošajām izmaiņām matemātikas metodikas jomā, metodiskās inovācijas ieviešamas arī Latvijā.

Autoru piedāvātie datu izkārtojumi un algoritmi matricu reizināšanai var tikt izmantoti lineārās algebras studijās augstskolā un vidusskolā. Ir vēlams metodiskās izstrādes šo algoritmu apguvei. Viens iespējams metodisks pētījumu virziens ir saistīts ar matricu stūra metodes ieviešanu lineāro attēlojumu interpretācijai. Iespējams organizēt kopīgus matemātiķu un datorzinātņu studentu projektus, kuros būtu īstenota paralēlskaldņu metode.

Aktuāls būtu pētījums par zināmo 2D algoritmu un ar tiem saistīto datu izkārtojumu pārveidošanu 3D formā. Var izvirzīt un risināt pētnieciskas un pedagoģiskas problēmas par optimāliem datu izkārtošanas veidiem svarīgos algoritmos, kas būtu ērti un viegli apgūstami skolēniem un studentiem. Ambicioza problēma būtu atrast veselo skaitļu pozicionālu pierakstu 2D formā.

## **Secinājumi** *Conclusions*

Svarīgu matemātisku operāciju rezultātu aprēķināšanai ir iespējami dažādi algoritmi, kas ir saistīti ar datu izkārtošanu 1D, 2D vai 3D veidā. Autori piedāvā praksē aprobētus divus jaunus algoritmus svarīgai matemātiskai operācijai – matricu reizināšanai. Šajos algoritmos tiek izmantota skaitlisko datu izkārtošana 2D un 3D veidā. Daudzveidība datu izkārtošanā uzlabo matemātikas izpratni studējošiem, to apliecina matricu stūra metodes pielietošana.

### Symmary

Arranging of numerical data and design of associated computational algorithms is important for teaching and learning of mathematics. Using various data arrangements and algorithms for the same area makes the learning of mathematics deeper. Data may be arranged in 1D, 2D, 3D or graph form. First ancient symbol and data arrangements including non-positional and positional numerical systems were 1D. These days unordered and ordered 1D arrangements are still widely used in data storage, basic algorithms, combinatorics, statistics etc. Development of mathematics led to the introduction of 2D data arrangements. Examples of usage of 2D arrangements include arithmetic and linear-algebraic operations. A synonym of 2D data arrangement is matrix. Data may also be arranged in 3D way although this is difficult to implement. 2D arrangements can be interpreted as graphs via the matrix-graph correspondence.

In this article we give novel data arranging techniques (2D and 3D) for matrix multiplication. Our 2D method (the matrix corner method) differs from the standard, formal approach by using block matrices. An expounding of this method was published earlier by two authors of this article. We find this method a useful alternative for introducing matrix multiplication. This method contributes to a deeper understanding of linear algebra. We also give a new innovative visualisation technique for matrix multiplication in 3D. In this method, matrices are positioned on the faces of a rectangular cuboid. This method may be a source of ideas for interdisciplinary student projects. Computerized implementations of this method may be considered as project proposals for mathematics and computer science students.

### References

- Agarwal, R.P., & Sen, S.K. (2014). *Creators of Mathematical and Computational Sciences*. New York: Springer.
- Andrilli, S., & Hecker, D. (2003). *Elementary linear algebra*. USA: Elsevier.
- Blyth, T., & Robertson, E. (2002). *Basic linear algebra* (2<sup>nd</sup> edition).UK: Springer Verlag London Limited.
- Boag, E. (2007). Lattice Multiplication. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 22(3), 182-184.
- Curtis, C. (1984). *Linear algebra - an introductory approach*. USA: Springer Science Business Media.
- Daugulis, P. (1998). Stable endomorphism rings of idempotent E-modules. *PhD thesis, University of Georgia, Athens, USA*.
- Daugulis, P., & Sondore, A. (2017). Visualizing matrix multiplication. *PRIMUS*, 28(1), 90-95.
- Kangro, A., & Kiseļova, R. (2019). *Latvija OECD Starptautiskajā skolēnu novērtēšanas programmā PISA 2018 – pirmie rezultāti un secinājumi*. Rīga. Pieejams [https://www.izm.gov.lv/images/aktualitates/2019/OECD\\_PISA\\_2018.pdf](https://www.izm.gov.lv/images/aktualitates/2019/OECD_PISA_2018.pdf)
- KM. (2018). Kolektīvā monogrāfija „Mācīšanās lietpratībai”. LU Akadēmiskais apgāds. Zin., red. D. Namšone. Pieejams <https://www.siic.lu.lv/petnieciba/monografija-macisanas-lietpratibai/>
- Mārtinsone, K., Pipere, A., & Kamerāde, D. (2016). *Pētniecība: teorija un prakse*. Rīga: Raka.

- Matrix-Matrix Multiplication on the GPU with Nvidia CUDA. (2019). Retrieved from <https://www.quantstart.com/articles/Matrix-Matrix-Multiplication-on-the-GPU-with-Nvidia-CUDA>
- NRC. (2012). Education for Life and Work: Developing transferable knowledge and skills in the 21st century. In Pellegrino, J. W., & Hilton, M. L. (Eds.), *Committee on Defining Deeper Learning and 21st Century Skills*. National Research Council (NRC). Retrieved from [https://www.nap.edu/resource/13398/dbasse\\_070895.pdf](https://www.nap.edu/resource/13398/dbasse_070895.pdf)
- Robinson, D. (2006). *A course in linear algebra* (2<sup>nd</sup> edition). Singapore: World Scientific Publishing.
- Skola2030. (2019). *Mācīšanās iedziļinoties*. Pieejams <https://www.skola2030.lv/lv/istenosana/macibu-pieejja/macisanas-iedzilinioties>
- Sondore, A., Krastiņa, E., Daugulis, P., & Drelinga, E. (2016). Pamatjēdzienu izpratne skolas matemātikas kompetenču apgūvē. *Society. Integration. Education. Proceedings of the International Scientific Conference, Volume II*, 330-342. DOI: <http://dx.doi.org/10.17770/sie2018vol1.3276>
- Sondore, A., Krastiņa, E., Daugulis, P., & Drelinga, E. (2017). Improving Mathematical Competence in Primary School to Enable Skill Transfers in New Situations. *Proceedings of the International Scientific Conference "Society. Integration. Education", Volume II*, 208-218. DOI: <http://dx.doi.org/10.17770/sie2018vol1.3276>
- Strazdiņš, I. (1980). *Diskrētās matemātikas pamati*. Rīga: Zvaigzne.
- Šteiners, K., & Siliņa, B. (1997). *Augstākā matemātika. I daļa*. Rīga: Zvaigzne ABC.