NESTACIONĀRU SĀKUMA VĒRTIBU PROBLĒMU ANALĪTISKĀ UN SKAITLISKĀ ATRISINAJUMA MATEMĀTISKĀ MODELĒŠANA DATORPROGRAMMAS MAPLE VIDĒ

MATHEMATICAL MODELLING OF THE ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTION OF NON-STATIONARY INITIAL-VALUE PROBLEMS BY MAPLE SOFTWARE

Autori: **Iļja SUČKOVS**, e-pasts:ilja.suckovs@inbox.lv,
Aleksandrs PIKURS, e-pasts: gerntrash@inbox.lv
Darba vadītājs: Mg.math., Dr.paed. **Ilmārs KANGRO**,
Rēzeknes Tehnoloģiju akadēmija, Atbrīvošanas aleja 115, Rēzekne, Latvija

Abstract. *With the passage of time and the development of technology, humanity is exploring new unknown problems that require complex analytical and numerical mathematical solutions. Due to their complexity differential equations are often used for this purpose. The aim of this work is to solve mathematical models of initial value problems of ordinary differential equations using the analitical method and numerical solution using MAPLE software. Also authors have provided general information about differential equations and diferent ways how they can be solved. As a result have been created two mathematical models which describe process of Determination of the cooling time of a shot animal and decomposition of the radioactive substance. Similar methods are also used to determine the age of objects as well.*

Keywords: *differential equation, initial value problem, Maple software, mathematical modeling, analitical and numerical solution.*

Ievads

Šī darba mērķis ir sākuma vērtibu problemu jeb Košī uzdevuma problēmas izpēte un uzdevumu analītiskā atrisināšana un skaitliska atrisinajuma matemātiskā modelēšana datorprogrammas Maple vidē.

Darba mērķis:

- pilnveidot matemātikas zināšanas par diferenciālvienadojuma sākuma vērtību problēmu;
- pilnveidot zināšanas par Maple datorprogramas operatoriem un to praktisko pielitojumu uzdevumu risināšanā.

Darba uzdevumi:

- izpētīt nestacionāru diferenciālvienādojumu sākuma vērtību problēmu;
- izpētīt un raksturot lineāra nehomogēna diferenciālvienādojumu ar konstantiem koeficientiem partikulāro atrisinājuma atrašanu;
- izpētīt un raksturot datorprogrammas Maple operatoru lietojumu lineāra nehomogēna diferenciālvienādojumu risināšanā;
- veikt uzdevumu sākuma nosacījumu problēmas matemātisko modelēšanu Maple vidē.

Materiāli un metodes

Diferenciālvienādojuma sākuma vērtību problēma

Lai pilnīgi viennozīmīgi raksturotu kādu fizikālu procesu, līdztekus diferenciālvienādojumam nepieciešams definēt sākuma nosacījumus jeb procesa stāvokli sākuma momentā. Uzdevumu

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),\ x(t_0) = x_0$$

jeb diferenciālvienādojumu kopā ar sākuma nosacījumu sauc par Košī jeb sākuma vērtību problēmu.

N-tās kārtas diferenciālvienādojumiem par Košī problēmu sauc uzdevumu

$\frac{d^n x}{dt^n} f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1},$

kas satur n-tās kārtas diferenciālvienādojumu un tā sākuma nosacījumus.

Katras Košī problēmas atrisinājumu sauc par diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu, bet visu diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu saimi sauc par šī vienādojuma vispārīgo atrisinājumu. Robežnosacījumi Košī uzdevumā netiek uzdoti, jo tiek apskatīts vai nu bezgalīgs mainīgā definīcijas apgabals, vai arī mazs laika intervāls, kad apgabala robežu ietekmi var neievērot.

Lineāru homogēnu otrās kārtas diferenciālvienādojumu atrisinājumu īpašības

Otras kārtas diferenciālvienādojumu sauc par lineāru diferenciālvienādojumu, ja tas nezināmo funkciju y′ un un tās atvasinājums y′ un y″ satur lineāri. Šāda vienādojuma normālforma ir $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$, kur $a_1(x), a_2(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas vai arī skaitļi. Ja $f(x) \not\equiv 0$, tad lineāro diferenciālvienādojumusauc par nehomogēnu vienādojumu. Ja $f(x) \equiv 0$, tad lineāro diferenciālvienādojumusauc par homogēnu vienādojumu. Tātad 2.kārtas lineāra homogēna diferenciālvienādojuma normālforma ir $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$.

Ja funkcija y_1 ir lineāra homogēna diferenciālvienādojuma (1) atrisinājums, tad ar jebkuru konstanti C funkcija Cy_1 arī ir šī vienādojuma atrisinājums. Tā kā y_1 ir atrisinājums, tad ir spēka identitāte $y'' + a_1 y_1' + a_2 y_2 \equiv 0$

Ja funkcijas y_1 un y_2 ir lineāra homogēna diferenciālvienādojuma atrisinājumi, tad arī funkcija $y_1 + y_2$ ir šī vinādojuma atrisinājums. No teorēmas nosacījuma izriet, ka ir spēkā identitātes $y'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0$

Ja funkcijas y_1 un y_2 ir lineāra homogēna diferenciālvienādojuma atrisinājumi, tad ar jebkurām konstantēm funkcija $C_1 y_1 + C_2 y_2$ arī ir ši vienādojuma atrisinājums.

Ja kompleksa funkcija $u(x) + iv(x)$ ir lineāra homogēna diferenciālvienādojuma atrisinājums, tad šī vienādojuma atrisinājumi ir arī funkcijas $u(x)$ un $v(x)$

$$(u'' + a_1 u' + a_2 u) + i(v'' + a_1 v' + a_2 v) = 0$$

Ja funkcijas y_1 un y_2 ir lineāri neatkarīgas un apmierina lineāru homogēnu diferenciālvienādojumu, tad funkcija $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ ir šī vienādojuma vispārīgais atrisinājums.

Lineāru homogēnu otrās kārtas diferenciālvienādojumu ar konstantiem koeficientiem. Eilera metode

$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$

Diferenciālvienādojuma koeficienti pie y' un y var būt arī skaitļi. Šāda vienādojumanormālforma ir $y'' + py' + qy = 0$;kur p un q ir constantes.

Visparigais atrisinājums ir$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$; $y_1 un\, y_2$ ir lineāri neatkarīgas funkcijas. Lai noteiktu atrisinājumus $y_1 un\, y_2$, ievērosim, ka vienādojumu apmierina eksponentfunkcija $y = e^{kx}$ ievitojot šo funkciju vienādojumā iegūstam $k^2 + pk + q = 0$, ko sauc par raksturīgo vienādojumu. Atkarībā no kvadratvienādojuma diskriminanta $D = \frac{p^2}{4} - q$ ir iespējami 3 gadījumi.

1. gadījums D>0 Šajā gadījumā ir divas dažādas reālas saknes k_1 un k_2 , kur vispārīgais atrisinājums ir $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.
2. gadījums D=0 Šajā gadījumā ir divas vienādas reālas saknes $k_1 = k_2$, kur vispārīgais atrisinājums ir $y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$
3. gadījums D<0 Šajā gadījumā saknes ir saistīti kompleksi skaitļi

$k_1 = \alpha + \beta i$ un $k_2 = \alpha - \beta i$, kur $\alpha = -\frac{p}{2}$ $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, kur vispārīgais atrisinājums ir $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Rezultāti un to izvērtējums

Apskatām diferenciālvinādojumu atrisināšanas praktiskos lietojumus.

1.uzdevums

Nošauta dzīvnieka atdzišanas laika noteikšana.

Divi mežsargi atrada nacionālajā parkā nošautas meža cūkas ķermeni. Pēc kāda laika azisturot malu mednieku, bija svarīgi noskaidrot nošaušanas laiku. To izdevās noteikt, pamatojoties uz siltuma izstarošanas likuma: ķermeņa atdzišanas ātrums gaisā ir proporcionāls starpībai starp ķermeņa un gaisa temperatūrām. Zināms, ka malu mednieka aizsturēšanas brīdī ķermeņa temperatūra bija 31^0C, bet pēc 1 stundas 29^0C.Pieņemsim,ka nošaušanas brīdī meža cūkas temperatūra ir 37^0C, bet gaisa temperatūra ir : 1) konstanta un nemainīga visu dienu 21^0C, 2) atkarīga no laika pēc nošaušanas brīža tā katrā stundā krīt pa 1^0C, bet malu mednieka aizturēšanas brīdī tā bija 21^0C. Noskaidrot dzīvnieka nošaušanas laiku un ķermeņa temperatūras atkarību no laika.

No uzdevuma nosacijumiem sastadām vienādojumu; x(t)-temperatūra atkarība no laikā; a(t)-gaisa temperatūra atkarība no laikā

1) Uzdevums kur a = const = 21 pēc nosacijuma $dx(t) = -k1\,(x(t) - a)\cdot dt$

2)Atdalām mainīgos

$$\frac{dx}{x-21} = -k1\cdot dt$$

3)Mainīgie ir atdalīti, vāram integrēt

$$\int \frac{dx}{x-21} = \int -k1\cdot dt$$

$$\ln(|x-21|) = -k1\cdot t + lnC1$$

$$\frac{(x-21)}{C1} = e^{-k1\cdot t}$$

$$x(t) = C1\cdot e^{-k1\cdot t} + 21$$

4)Atrisinām C1 pēc nosacījuma x(0)=31

$$31 = C1\cdot e^{-k1\cdot 0} + 21$$

$$C1 = 10$$

5)C1 ir atrisināts, atrisinām k1 pēc otrā nosacījuma x(1)=29

$$29 = 10\cdot e^{-k1\cdot 1} + 21$$

$$k1 = -\ln\frac{8}{10} = 0.22314$$

6)k1 ir atrisināts, tagad var uzzināt, kād bija nošauta meža cūka, x(t)=37(dzīvas mežas cūkas temperatūra)

$$37 = 10\cdot e^{-0.223144\cdot t} + 21$$

$$t = \frac{\left(\ln\frac{16}{10}\right)}{-0.223144} = -2.11$$

t ir atrisināts - meža cūka nomira pirms 2.11 stundām vai 2 stundām un 7 minūtem pirms mežsargi viņu atrāda

2)

x=x(t)-mēža cūkas temperatūra atkarība no laika

a=a(t)-gaisa temperatūra atkarība no laika

1) 2. Uzdevums kur a = a(t) = 21 - t

$$\frac{dx(t)}{dt} = -k\cdot(x(t) - a(t))$$

2)Atdalām mainīgos

$$\frac{dx(t)}{dt} = x'(t)$$

$$x'(t) = -k\cdot(x(t) - 21 + t)$$

$$x'(t) = -k\cdot x(t) - k(-21 + t)$$

$$x'(t) + k\cdot x(t) = k\cdot(21 - t) \quad (2.1)$$

3)Atradām x homogēno (xH) un x partikulāro (xP) lai atrisinātu funkciju x(t)

$x(t) = xH(t) + xP(t)$

xH – x homogēnais
xP – x partikulārais

3.1)Homogēna vienadojuma (xH(t)) atrisinājums

$x'(t) + k \cdot x(t) = 0$

$k \cdot r^0 + r = 0$

$r = -k$

$xH(t) = C \cdot e^{-k \cdot t}$

3.2)Partikulāra vienadojuma (xP(t)) atrisinājums

$f(t) = k \cdot (21 - t)$

$f(t) = k \cdot (21 - t) \cdot e^{0 \cdot t}$

$xP(t) = t^S \cdot Q(t) \cdot e^{r \cdot t}$

$r = -k$

$0 \neq -k \Rightarrow S = 0$

$Q(t) = d0 + d1 \cdot t$

$xP(t) = t^0 \cdot Q(t) = 1 \cdot (d0 + d1 \cdot t) = d0 \cdot d1 \cdot t$ (2.2)

4)Ievietojām (2.2) atrisinājumu (2.1) vienādojumā

$(d0 + d1 \cdot t)' + k \cdot (d0 + d1 \cdot t) = 21 \cdot k - k \cdot t$

$d1 + k \cdot d0 + k \cdot d1 \cdot t = 21 \cdot k - k \cdot t$

5)Atrisinām d1 un d1 atrisinājumu ievietojam otrā vienadojumā lai atrisināt d0

$k \cdot d1 \cdot t = -k \cdot t$

$d1 = -1$

$d1 + k \cdot d0 = 21 \cdot k$

$-1 + k \cdot d0 = 21 \cdot k$

$d0 = 21 + \frac{1}{k}$

6)Atrisinām x(t) pēc sākuma nosacījumiem x(0)=31, x(1)=29, x(t)=37

$x(t) = xH(t) + xP(t)$ $\qquad x(t) = C \cdot e^{-k \cdot t} + d0 + d1 \cdot t$

6.1)d0 un d1 vietā ievietojām to ko atradām punktā 5\

$x(t) = C \cdot e^{-k \cdot t} + 21 + \frac{1}{k} - 1 \cdot t$

6.2)Risinām C, no nosacījuma x(0)=31

$x(0) = C \cdot e^{-k \cdot 0} - 1 \cdot 0 + 21 + \frac{1}{k}$

$31 = C + 21 + \frac{1}{k}$

$C = 10 - \frac{1}{k}$

6.3)Ievietojām C atrisinājumu x(t) vienādojumā un risinām k, no nosacījuma x(1)=29

$x(1) = \left(10 - \frac{1}{k}\right) \cdot e^{-k \cdot 1} - 1 \cdot 1 + 21 + \frac{1}{k}$

$29 = \left(10 - \frac{1}{k}\right) \cdot e^{-k} - 1 + 21 + \frac{1}{k}$

6.4)Ar datorprogrammu Maple risinām k

$> k1 := fsolve\left(29 = \left(10 - \frac{1}{k}\right) \cdot \exp(-k) - 1 + 21 + \frac{1}{k}\right)$

0.210916251!

6.5)Atrisinām x(t) vienādojumu ar Maple palidzību kur x(t)=37

$> c := \left(10 - \frac{1}{k}\right) \cdot \exp(-k \cdot t) - t - 16 + \frac{1}{k}$

$\left(10 - \frac{1}{k}\right) e^{-k\,t} - t - 16 + \frac{1}{k}$

$>$ t1 := unapply(subs(k = k1, c), t)

$t \rightarrow 5.258781668 e^{-0.2109162519\,t} - t - 11.2587816'$

$> fsolve(t1)$

$-2.44724107'$

x(t)=37 ir atrisināts

t ir atrisināts - meža cūka nomira pirms 2.447 stundām vai 2 stundām un 27 minūtem pirm mežsargi viņu $xtk := \left(10 - \frac{1}{k}\right) \cdot \exp(-k \cdot t) + 21 - t + \frac{1}{k}$

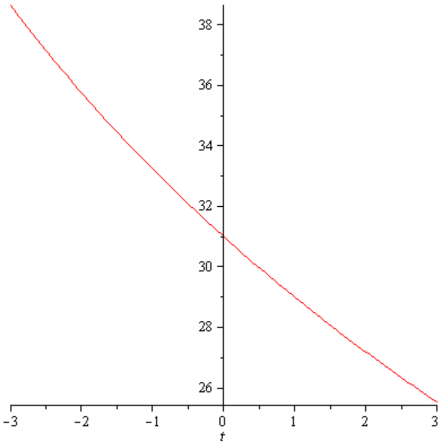
$$\left(10 - \frac{1}{k}\right) e^{-k\,t} + 21 - t + \frac{1}{k}$$

$xt := unapply\,(subs\,(k = k1, xtk), t)$

$$t \rightarrow 5.258781668 e^{-0.2109162519\,t} + 25.74121833 - t$$

$> plot(xt(t), t = -3\,..3)$

2.attēlā ir redzams mēža cūkas ķermeņa temperatūra pēc laika t.



2. attēls **Mēža cūkas ķermeņa temperatūra pēc laika t**

2.uzdevums

Radioaktīvas vielas sadalīšanās

Radioaktīvā viela, kuras sākuma dazudzums m_0, sadalās (primārā reakcija). Reakcijas produkts arī sadalās (sekundārā reakcija). Abu reakciju ātrums proporcionāls reaģējošās vielas daudzumam. Atrast gala produkta daudzumu atkarībā no laika.

No uzdevuma nosacijumiem sastadām vienādojumu ;m0 - vielas sakotnējais daudzums ;t – laiks; x=x(t) - primārās reakcijas produkta daudzums pēc laika t ;y=y(t) - sekundārās reakcijas produkta daudzums pēc laika t

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = k1 \cdot (m0 - x(t)) \quad (1) \\ \frac{dy(t)}{dt} = k2 \cdot (x(t) - y(t)) \end{array} \right. \quad (2)$$

Sākam risināt pirmo vienādojumu:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -k1 \cdot (x(t) - m0)$$

1) Jāatdala mainigie

$$\frac{dx}{x - m0} = -k1 \cdot dt$$

2)Mainīgie ir atdalīti, varam integrēt

$$\int \frac{dx}{x - m0} = \int -k1 \cdot dt$$

$$\ln(|x - m0|) = -k1 \cdot t + \ln(|C1|)$$

$$\frac{x - m0}{C1} = e^{-k1 \cdot t}$$

$x(t) = C1 \cdot e^{-k1 \cdot t} + m0$(1.1)

3)No vienādojuma (1.1) un sākuma nosacījuma (x(0) = 0) izsakām C1

$$x(0) = C1 \cdot e^{-k1 \cdot 0} + m0$$

$$0 = C1 \cdot 1 + m0$$

$$C1 = -m0$$

4)C1 atrisinājumu ievieto (1.1) vienādojumā

$x(t) = -m0 \cdot e^{-k1 \cdot t} + m0$(1.2)

Sākam risināt otru vienādojumu

$\frac{dy(t)}{dt} = k2 \cdot (x(t) - y(t))$

1)x(t) vietā ievietojām (1.2) vienādojumu

$\frac{dy(t)}{dt} = k2 \cdot \left(-m0 \cdot e^{-k1 \cdot t} + m0 - y(t)\right)$

2)Atverām iekavās un atdalām mainigo

$y'(t) + k2 \cdot y(t) = -k2 \cdot m0 \cdot e^{-k1 \cdot t} + k2 \cdot m0$(2.1) $\frac{dy(t)}{dt} = y'(t)$

3)Atradām y homogēno (yH) un y partikulāro (yP) lai atrisināt funkciju y(t)

$y(t) = yH + yP$yH – y homogēnais

yP – y partikulārais

Homoģēna vienādojuma risinājums

$y'(t) + k2 \cdot y(t) = 0$

$k + k2 = 0 \Rightarrow \quad k = -k2$

$yH = C2 \cdot e^{-k2 \cdot t}$

Partikulāra vienādojuma risinājums

$f1(t) = k2 \cdot m0 \cdot e^{0 \cdot t}$

$yP1 = A \cdot e^{0 \cdot t} = A$

$f2(t) = k2 \cdot m0 \cdot e^{-k1 \cdot t}$

$yP2 = B \cdot e^{-k1 \cdot t}$

$yP = yP1 + yP2 = A + B \cdot e^{-k1 \cdot t}$(2.2)

3)Ievietojām (2.2) vienādojumu vienadojumā (2.1)

$\left(A + B \cdot e^{-k1 \cdot t}\right)' + k2 \cdot \left(A + B \cdot e^{-k1 \cdot t}\right) = -k2 \cdot m0 \cdot e^{-k1 \cdot t} + k2 \cdot m0$

Risinām vienādojumu, meklējam B un A atrisinājumus

$-k1 \cdot B \cdot e^{-k1 \cdot t} + k2 \cdot A + k2 \cdot B \cdot e^{-k1 \cdot t} = -k2 \cdot m0 \cdot e^{-k1 \cdot t} + k2 \cdot m0$

$e^{-k1 \cdot t}(-k1 \cdot B + k2 \cdot B) = -k2 \cdot m0 \cdot e^{-k1 \cdot t}$

$B \cdot (-k1 + k2) = -k2 \cdot m0$

$B = -\frac{-k2 \cdot m0}{-k1 + k2} = -\frac{k2 \cdot m0}{-k1 + k2}$ - B atrisinājām

$k2 \cdot A = k2 \cdot m0$

$A = m0$- A atrisinājām

4)Ievietojām A un B atrisinājumūs vienadojumā (2.2)

$yP = A + B \cdot e^{-k1 \cdot t} = m0 - \frac{k2 \cdot m0}{-k1 + k2} \cdot e^{-k1 \cdot t}$

5)Atrisinām y(t) no sākuma nosacījuma (y(0) = 0)

$y(t) = yH + yP = C2 \cdot e^{-k2 \cdot t} + m0 - \frac{k2 \cdot m0}{-k1 + k2} \cdot e^{-k1 \cdot t}$

$y(0) = C2 \cdot e^{-k2 \cdot 0} + m0 - \frac{k2 \cdot m0}{-k1 + k2} \cdot e^{-k1 \cdot 0}$

$0 = C2 \cdot 1 + m0 - \frac{k2 \cdot m0}{-k1 + k2} \cdot 1$

$C2 = -m0 + \frac{k2 \cdot m0}{-k1 + k2} = \frac{k1 \cdot m0}{-k1 + k2}$

$y(t) = \frac{k1 \cdot m0}{k2 - k1} \cdot e^{-k2 \cdot t} + m0 - \frac{k2 \cdot m0}{k2 - k1} \cdot e^{-k1 \cdot t}$

Uzdevums ir izpildīts, x(t) un y(t) ir atrasti

$x = x(t) = -m0 \cdot e^{-k1 \cdot t} + m0$

$y = y(t) = \frac{k1 \cdot m0}{k2 - k1} \cdot e^{-k2 \cdot t} + m0 - \frac{k2 \cdot m0}{k2 - k1} \cdot e^{-k1 \cdot t}$

1.uzdevuma skaitliskais atrisinājums ar Maple, izvēloties parametrus: m0=10, k1=0.02, k2=0.01

```
> restart : m0 := 10 : k1 := 0.02 : k2 := 0.01 :
```

$vdj := diff(x(t), t) = k1 \cdot (m0 - x(t)), diff(y(t), t) = k2 \cdot (x(t) - y(t))$

$$\frac{d}{dt}x(t) = 0.20 - 0.02\,x(t), \frac{d}{dt}y(t) = 0.01\,x(t) - 0.01\,y(t)$$

$p := dsolve(\{vdj, x(0) = 0, y(0) = 0\});$

$$\left\{x(t) = 10 - 10\,e^{-\frac{1}{50}t}, y(t) = 10 + 10\,e^{-\frac{1}{50}t} - 20\,e^{-\frac{1}{100}t}\right\}$$

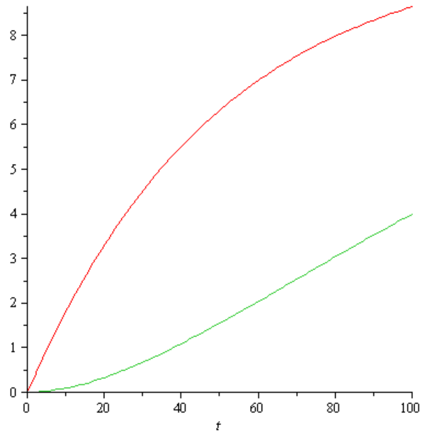
$x1 := unapply(rhs(p[1]), t); y1 := unapply(rhs(p[2]), t);$

$$t \rightarrow 10 - 10\,e^{-\frac{1}{50}t}$$

$$t \rightarrow 10 + 10\,e^{-\frac{1}{50}t} - 20\,e^{-\frac{1}{100}t}$$

$plot([x1(t), y1(t)], t = 0..100);$

1.attēlā ir redzams primārās un sekundārās reakcijas produkta daudzums pēc laika t.



1. attēls. Primārās un sekundārās reakcijas produkta daudzums atkarībā no laika x(t)-sarkanā līnija, y(t)-zaļa līnija

Secinājumi

1. Balstotes uz literatūru, tika atrasti aplūkoto praktisko lietojumu uzdevumu analītiskie atrisinājumi vispārīgā veidā atkarībā no parametru vērtībām. Tas ļauj atrast dotās problēmas atrisinājumu pie konkrētam parametru vērtībām, ir iespēja salīdzināt dažādus atrisinājumus.
2. Izmantojot Maple, tika atrasti skaitliskie atrisinājumi pie konkrētam parametru vērtībām.
3. Datorprogramma Maple ļauj risināt diferenciālvienādojumu sākuma vērtību problēmas gan analītiskā (formulu veidā), gan skaitliskā veidā.

Literatūra

1. Šteiners, K. *Augstākā matemātika.-IV : lekciju konspekts inženierzinātņu un dabaszinātņu studentiem.*- Rīga : Zvaigzne ABC, 1999. 98-125 lpp.
2. *Augstākā matemātika, statistika un matemātiskā modelēšana inženierzinātņu studentiem : mācību līdzeklis* / Rēzeknes Augstskola. Inženieru fakultāte; Pēteris Daugulis, Ilmārs Kangro, Andris Martinovs, Ilga Morozova. Rēzekne : RA Izdevniecība, 2008. - 655 lpp.
3. Kalis, H. *Skaitliskās metodes.*- Rīga, 2008. -185 lpp
4. Andre Hesck *Introduction to Maple Third Edition :* Waterloo Maple, LLC USA 2003.
5. William E. Boyce, Richard C. DiPrima *Elementary Differential equations and boundary value problems Fourth edition :* John Wiley and Sons, Inc. USA 1986.