

## ДИНАМИКА ГРАВИТАЦИОННОГО УДАРНОГО ПИТАТЕЛЯ GRAVITY – OPERATED IMPACT FEEDER DYNAMICS

С.Полукошко<sup>1</sup>, О.Кононова<sup>2</sup>, С. Соколова<sup>2</sup>

1- Вентспилская Высшая Школа, Инженерно-Исследовательский Центр

2- Рижский Технический университет, Институт Механики

E-mail: pol.svet@inbox.lv

---

**Abstract.** This paper deals with the dynamics of rigid body that collide with a rigid surface; such motion with impact of bodies takes place in the gravity operated impact feeders. Feeders are mechanisms of the single-piece feeding for the forced moving of the oriented workpieces. In this work the vertical gravity-impact feeder for moving of the prismatic or plane details is presented. The parts move on inclined guiding plates, free fall and collide with the down plates, the impact phenomena may be used both for decreasing of velocity and for the orientation of the tracking workpieces (lateral reversing). System of equations of plane motion of detail, including stages of sliding on the slope guideway, free flight, impact and motion to the next guideway, are written down. System of equations is solved numerically with help of MathCAD program.

**Key words:** forced moving, motion of bodies with impact, dry friction, unilateral constrain.

---

### Введение

Широко распространённым видом технологического транспорта являются различного вида транспортёры, спуски, бункеры, питатели (фидеры). Питатели – это различного вида загрузочно - разгрузочные устройства, которые служат для подачи детали в ориентированном положении на конвейер или к обрабатывающему оборудованию [7; 8; 9].

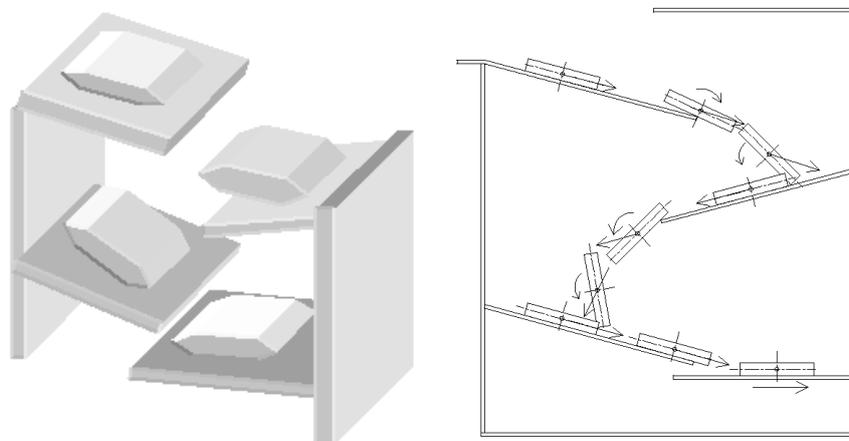


Рис.1. Модель гравитационного питателя и схема движения детали

В данной работе рассмотрен вертикальный механический питатель с гравитационным способом транспортирования; устройства такого типа служат для транспортирования лёгких изделий с небольшой скоростью скольжения (Рис.1). Явление удара в питателях может использоваться как для снижения скорости транспортируемых деталей, так и для их ориентации – поворота противоположной стороной. Питатель представляет собой вертикальный лоток с прикрепляемыми к стенкам пластинами, угол наклона которых можно регулировать. Деталь начинает движение по поверхности пластины, когда угол наклона пластины к горизонту становится больше угла трения. Для правильного ориентирования детали в пластине устраивается направляющий паз, поэтому движение детали по пластине будет плоским. Деталь скользит по наклонной пластине, свободно падает на нижерасположенную пластину, при ударе с которой может менять положение,

переворачиваясь обратной стороной. Количество пластин зависит от высоты, на которую необходимо передать детали, наклон пластин и расстояние между ними зависит от допустимой скорости движения деталей и от необходимости поворачивать деталь. Схема движения плоского сечения детали по направляющим показана на рисунке 1.

### 1. Расчётные модели

Деталь рассматривается как абсолютно твёрдое тело, движение которого прерывается соударениями с неподвижной абсолютно твёрдой поверхностью. Такие задачи относятся к разделу механики, изучающему динамику систем с неустойчивыми связями [2; 3; 5; 6]. Наиболее актуальным здесь является моделирование и анализ явления удара [1; 3; 4]. Удар тела моделируется как удар абсолютно твёрдого тела, для решения используется классическая теория удара в сочетании с гипотезой Раусса, учитывающей трение при ударе по закону Кулона. Для получения параметров удара составляются общие уравнения динамики, при этом время удара разделяется на две фазы – в конце первой фазы нормальная скорость точки контакта тела равна нулю, это даёт дополнительное уравнение связи для определения неизвестных. Для описания процесса удара используется ударный импульс, полные импульсы нормальной реакции в первой и второй фазах связаны соотношением  $S_{IIN} = RS_{IN}$ , полные импульсы сил трения при скольжении равны  $S_{IF} = -fS_I$ ,  $S_{IIF} = -fS_{II}$ . Как показано в рис. При плоском

ударе тела о неподвижную преграду в зависимости от начальных условий удара и инерционных свойств тела могут существовать семь качественно различных случаев удара: 1) полное скольжение тела в одном направлении, порождаемое доударным движением тела; 2) тоже, порождаемое доударным расположением тела; 3) нескольжение в точке контакта; 4) полное скольжение сначала в одном, а затем в противоположном направлении с реверсом во второй фазе удара; 5) тоже, с реверсом в первой фазе удара; 6) прекращение скольжения во второй фазе удара; 7) тоже, в первой фазе удара. Второй и третий случаи удара появляются тогда, когда точка касания имеет только нормальную к поверхности удара скорость, что в данном случае движения детали исключено. Удар считается абсолютно неупругим, т.е. коэффициент  $R = 0$ , поэтому четвёртый и шестой случаи удара также не рассматриваются.

### 2. Уравнения динамики

При движении тела по направляющим пластинам фидера различаются 5 этапов:

- 1) скольжение по наклонной плоскости - поступательное движение;
- 2) плоское движение – скольжение с поворотом при наличии неустойчивой связи;
- 3) свободное движение тела в поле силы тяжести;
- 4) столкновение с наклонной плоскостью;
- 5) плоское движение – скольжение с вращением до соударения с плоскостью.

Особенностью записи уравнений динамики и определения параметров движения в данной задаче является использование для каждого вида движения своей системы координат, составление формул преобразования координат и значений проекций скоростей из одной системы в другую. Конечные значения параметров на каждом этапе являются начальными в новой системе координат для следующего этапа движения.

#### 1) Поступательное движение - скольжение по наклонной плоскости (рис.2).

Координата – ось  $x$ , уравнение движения на первом этапе при безотрывном движении:

$$\ddot{x}_c = g(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha)),$$

скорость и время движения:  $v = \sqrt{2gL(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha))}$ ,  $T = \sqrt{\frac{2L}{g(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha))}}$ .

где  $\alpha$  – угол наклона плоскости к горизонту,  $c$  – центр масс тела,

$f$  – коэффициент трения (покоя и скольжения предусматриваются одинаковыми).

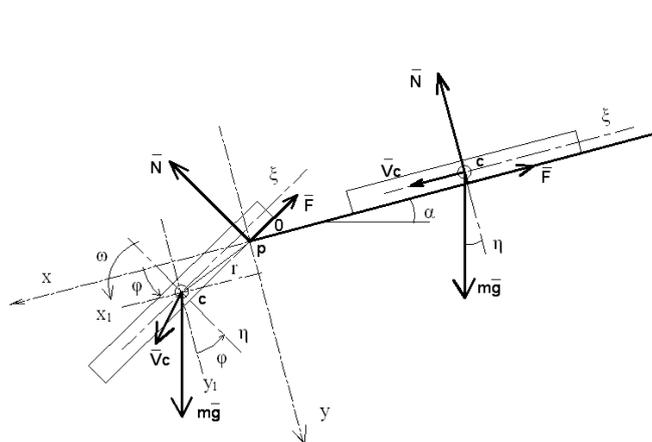


Рис. 2. Первый и второй этапы движения

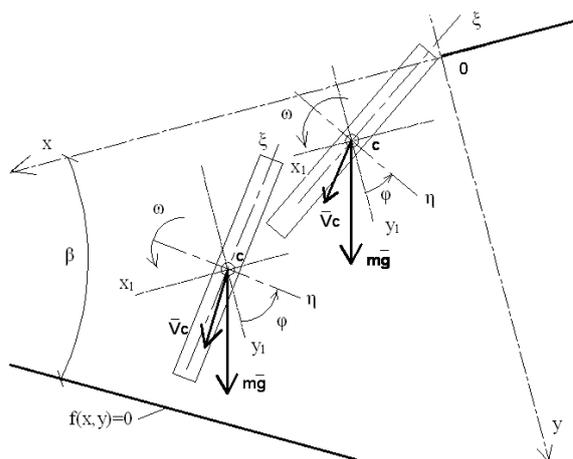


Рис. 3. Третий этап движения тела

2) Плоское движение - скольжение с поворотом вокруг точки  $P$  до отделения от связи (рис.2). Связь в точке контакта  $P$  детали и пластины неудерживающая, сила реакции в точке касания подчиняется условиям закона сухого трения, т.е. закону Кулона:

$$F = -fN \frac{v_p}{|v_p|} \text{ при } v_p \neq 0, \quad |F| \leq fN \text{ при } v_p = 0, \quad N \geq 0,$$

$N$  - нормальная сила реакции,  $F$  – касательная сила реакции.

Системы координат (рис.2):  $xoy$ - неподвижная прямоугольная система координат, начало координат - край плиты,  $x_1y_1$  - проходящая через центр масс декартова система координат, параллельная  $xoy$ ,  $\xi\eta$  - прямоугольная система координат, жёстко связанная с телом, полярные координаты:  $r$  – радиус-вектор, из точки  $P$  в  $c$ , и  $\varphi$  – угол собственного поворота тела,  $r = r(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $x = r \cos(\varphi)$ ,  $y = r \sin(\varphi)$ .

Уравнения движения:

$$\begin{cases} r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -\frac{N}{m} + g \cos(\alpha + \varphi) \\ \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{F}{m} + g \sin(\alpha + \varphi) \\ J\ddot{\varphi} = Nr \end{cases}$$

Угловая скорость и угловое ускорение тела:

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \ddot{\varphi} = \varepsilon,$$

радиальная и тангенциальная скорости центра масс:

Начальные условия второго этапа:

$$\omega_1 0 = 0, \quad v_1 0 = v_1 r = v, \quad r_1 0 = 0, \quad \varphi_1 0 = 0, \quad N_1 0 = mg \cos(\alpha),$$

конечные параметры второго этапа:  $\omega_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $r_1$ ,  $\dot{r}_1$ .

Конец этапа – равенство нулю нормальной реакции или равенство координаты центра масс

расстоянию от центра масс до края детали:  $r_1 = a/2$  или  $N_1 \leq 0$ .

Начальные условия третьего этапа:

$$x_{c0} = r_1 \cos[(\varphi_1)], \quad y_{c0} = r_1 \sin(\varphi_1), \quad \omega_0 = \omega_1$$

$$\dot{x}_0 = \dot{r}_1 \cos[(\varphi_1)] - r_1 \dot{\varphi} \sin(\varphi_1) \quad \text{и} \quad \dot{y}_0 = \dot{r}_1 \sin(\varphi_1) + r_1 \dot{\varphi} \cos(\varphi_1)$$

3) Свободное движение тела в поле силы тяжести (рис. 3) используются декартовы координаты  $xoy$ :

$$\begin{cases} \ddot{x}_c = g \sin(\alpha) \\ \ddot{y}_c = g \cos(\alpha) \\ J\ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Уравнение нижней пластины в координатах  $xoy$ :

$$f(x, y) = 0, \quad \text{или как уравнение прямой в отрезках: } \frac{x}{d} + \frac{y}{b} = 1$$

где  $d$  и  $b$  – отрезки, отсекаемые линией нижней пластины по осям  $x$  и  $y$ .

Координаты точки столкновения  $K$ :

$$x_K = x_c + \frac{a}{2} \cos(\varphi), \quad y_K = y_c + \frac{a}{2} \sin(\varphi).$$

Определение точки соударения и момента удара - выполнение условия односторонней связи:

$$\frac{x_K}{d} + \frac{y_K}{b} \geq 1,$$

Нормальная и касательная к плоскости скорости точки контакта в момент начала удара:

$$\begin{aligned} \dot{x}_K &= \dot{x}_c - \omega_1 \frac{a}{2} \sin(\varphi), & \dot{y}_K &= \dot{y}_c + \omega_1 \frac{a}{2} \cos(\varphi), & \omega_1 &= \omega_0 \\ v_{Kn} &= \dot{x}_K \sin(\beta) + \dot{y}_K \cos(\beta) & v_{Kt} &= -\dot{x}_K \cos(\beta) + \dot{y}_K \sin(\beta) \\ v_{Kn} &= \dot{x}_c \sin(\beta) + \dot{y}_c \cos(\beta) + \omega_1 \frac{a}{2} \cos(\varphi + \beta) \end{aligned}$$

**4) Удар тела о неподвижную поверхность нижней пластины (рис. 4),** координаты - нормаль и касательная к пластине, начало координат – в точке соударения  $K$ :  $nKt$ , координаты тела за время удара не меняются, послеударные скорости определяются из общих уравнений динамики для удара [1].

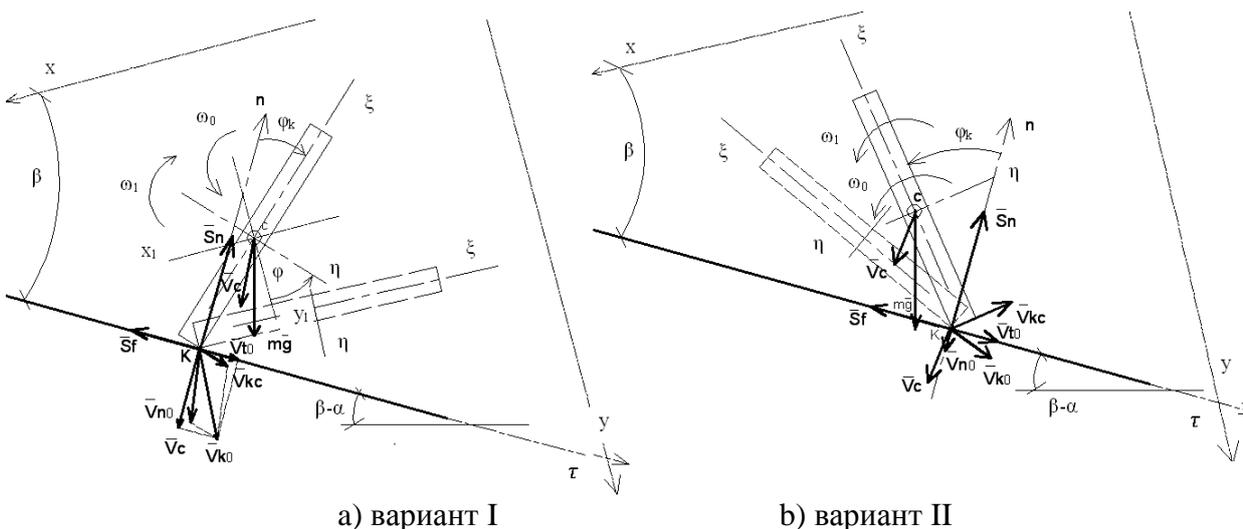


Рис.4. Четвёртый и пятый этапы – удар о плоскость и послеударное движение

Угол между направлением оси  $\xi$  пластины скорости и нормалью к площадке

$$\varphi_K = \beta + \varphi - \frac{\pi}{2}$$

угол между направлением предударной скорости и нормалью к площадке

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_{kt}}{v_{kn}}\right).$$

**5) Послеударное движение (рис. 4)** - плоское движение со скольжением по плоскости без отрыва при условии абсолютно неупругого удара. Движение тела после удара описывается дифференциальными уравнениями в проекции на оси  $\tau$  и  $n$ , с начальными условиями, полученными на предыдущем этапе расчёта – угловая скорость, скорость центра масс и динамическая реакция в точке удара.

### 3. Численные примеры

Ниже приводится пример численного решения данной задачи для транспортировки детали со следующими данными: масса  $m=0,3$  кг, длина  $0,1$  м, момент инерции относительно оси,

проходящей через центр масс  $J_c = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , по двум направляющим пластинам (рис.2 и 3). Рассмотрено два варианта движения детали – подача с одной пластины на другую без переворачивания детали и подача с реверсом, для этого примяются разные способы расположения пластин: 1) в первом варианте приняты следующие параметры: угол наклона направляющих пластин  $\alpha=15^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ , уравнение поверхности нижней пластины в осях  $xu$ , проходящих через край первой пластины:

$$\frac{x}{0.347} + \frac{y}{0.2} = 1$$

2) во втором варианте углы наклона верхней и нижней направляющих пластин различны  $\alpha=10^\circ$ ,  $\beta = 35^\circ$ , уравнение поверхности нижней пластины в осях  $xu$

$$\frac{x}{0.428} + \frac{y}{0.3} = 1$$

Коэффициент трения скольжения и покоя принят одинаковым и равным  $f=0,15$ , коэффициент восстановления нормальной реакции в точке удара принят равным  $R= 0$ .

Движение детали начинается с безотрывного скольжения по верхней пластине, расчёт выполнен в программе MathCAD, результаты расчёта приведены в таблице 1.

Как видно из таблицы, в первом случае угловая скорость меняет знак после удара, скорость точки тела, соприкасающейся с поверхностью, также меняет знак, после удара тело ложится на пластину той же стороной; во втором случае скорости знака не меняют, после удара тело ложится на пластину обратной стороной. Графики для первого варианта зависимости параметров движения от времени приведены на рис. 5-7.

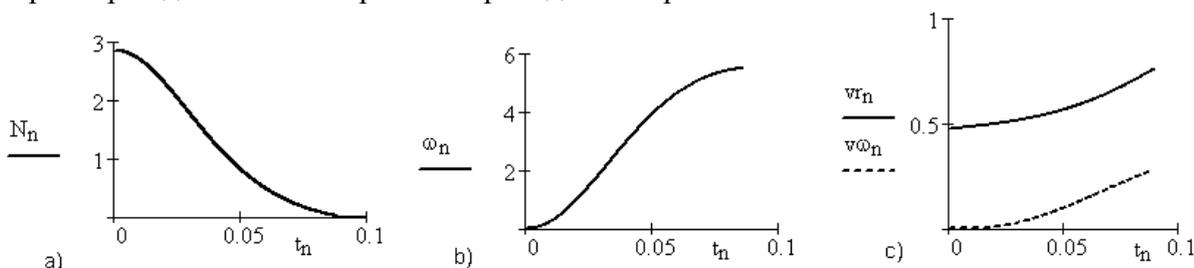


Рис.5. Движении тела на втором этапе. Графики зависимости а) нормальной реакции опорной точки  $N=N(t)$ , б) угловой скорости  $\omega = \omega(t)$ , в) скоростей радиальной  $v_{cr} = v_{cr}(t)$  и тангенциальной  $v_{c\omega} = v_{c\omega}(t)$  центра масс

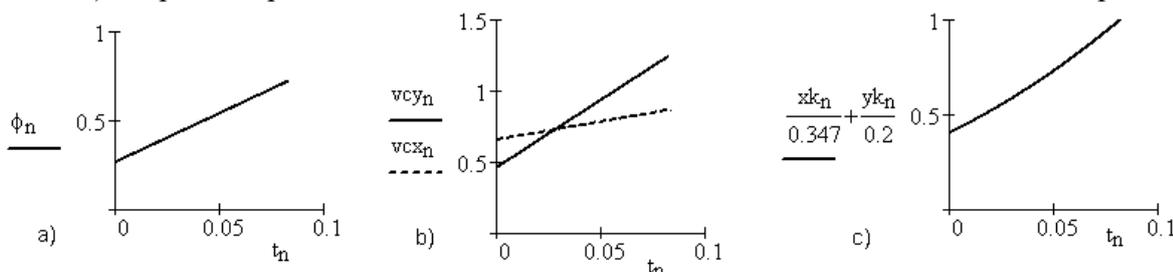


Рис. 6. Движение тела на третьем этапе. Графики зависимости: а) угла поворота от времени  $\varphi = \varphi(t)$ , б) скорости центра масс от времени  $v_{xc} = v_{xc}(t)$ ,  $v_{yc} = v_{yc}(t)$ , в) функции ограничения от времени  $x_k/0.428 + y_k/0.3 \leq 1$

## Параметры движения тела по направляющим пластинам питателя

№	Этап движения Параметр движения	Ед. изм		Вариант 1	Вариант 2
				$\alpha=15, \beta=30$	$\alpha=10, \beta=35$
Первый этап – скольжение					
1	Время скольжения	<i>c</i>	<i>t</i>	0,423	0.887
2	Скорость в конце первого этапа	<i>м/с</i>	$v_0$	0.473	0.226
Второй этап – плоское движение до освобождения от связи					
3	Начальные координаты центра масс	<i>м/с</i>	$r_0$	0	0
		<i>м/с</i>	$\varphi_0$	0	0
4	Начальная скорость центра масс	<i>м/с</i>	$v_{r0}$	0.473	0.226
		<i>м/с</i>	$v_{\varphi 0}$	0	0
5	Начальная угловая скорость	$c^{-1}$	$\omega_0$	0	0
6	Время движения	<i>c</i>	<i>t</i>	0.879	1.169
7	Конечные координаты центра масс	<i>м</i>	<i>r</i>	0.5	0.35
		<i>рад</i>	$\varphi$	0.265 (15.18°)	0.439(45.15°)
8	Конечная скорость центра масс	<i>м/с</i>	$v_{r1}$	0.746	0.527
		<i>м/с</i>	$v_{\varphi 1}$	0.271	0.269
9	Конечная угловая скорость	$c^{-1}$	$\omega_1$	5.490	7.637
Третий этап – свободное плоское движение					
10	Начальные координаты центра масс	<i>м</i>	$x_{c0}$	0.049	0.032
		<i>м</i>	$y_{c0}$	0.012	0.015
11	Начальная скорость центра масс	<i>м/с</i>	$v_{xc0}$	0.653	0.363
		<i>м/с</i>	$v_{yc0}$	0.461	0.467
12	Угловая скорость $\omega_0 = \omega_1$	$c^{-1}$	$\omega_0$	5.490	7.637
13	Время движения	<i>c</i>	<i>t</i>	0.821	1.417
14	Координаты центра масс в конце этапа	<i>м</i>	$x_{c1}$	0.111	0.101
		<i>м</i>	$y_{c1}$	0.082	0.178
15	Угол поворота в конце этапа	<i>рад</i>	$\varphi_1$	0.716(41.02°)	1.521(87.15°)
16	Скорость центра масс в конце этапа (начале удара)	<i>м/с</i>	$v_{cx1}$	0.862	0.605
		<i>м/с</i>	$v_{cy1}$	1.239	1.837
Четвёртый этап – столкновение с наклонной плоскостью - удар					
17	Угол между телом и нормалью к поверхности пластины	<i>рад</i>	$\varphi_k$	-0.331(18.97°)	0.561(32.14°)
18	Координаты центра масс в начале удара	<i>м</i>	$r_{c0}$	0,016	-0.027
		<i>м</i>	$n_{c0}$	0,047	0.042
19	Скорость центра масс в начале удара	<i>м/с</i>	$v_{ct0}$	-0.127	0.558
		<i>м/с</i>	$v_{cn0}$	-1.504	-1.852
20	Начальная скорость точки тела, соударяющейся с поверхностью	<i>м/с</i>	$v_{кт0}$	0.133	0.881
		<i>м/с</i>	$v_{кн0}$	-1.593	-1.649
21	Тип удара			5	1
22	Скорость центра масс в конце удара	<i>м/с</i>	$v_{ct1}$	0,043	0.408
		<i>м/с</i>		-0,188	-0.851
23	Угловая скорость в конце удара	$c^{-1}$	$\omega_1$	-11.722	31.972
24	Конечная скорость точки удара	<i>м/с</i>	$v_{кт0}$	-0,508	0.408
		<i>м/с</i>		0	0
Пятый этап – плоское движение до столкновения с плоскостью					
25	Время движения	<i>c</i>	<i>t</i>	0.868	0.031
26	Конечная угловая скорость	$c^{-1}$	$\omega_1$	-18.837	34.50
27	Конечная скорость центра масс	<i>м/с</i>	$v_{ct1}$	0.284	0.527
		<i>м/с</i>		-0.876	-1.072

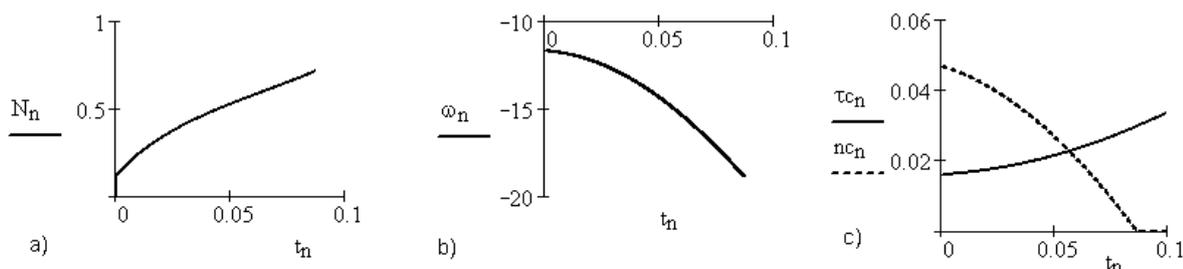


Рис. 7. Движение тела на пятом этапе. Графики зависимости: а) нормальной реакции  $N=N(t)$ , б) угловой скорости  $\omega = \omega(t)$ , в) координат центра масс  $\tau_c = \tau_c(t)$ ,  $n_c = n_c(t)$

### Выводы

В данной работе изучается динамика движения абсолютно твёрдого тела при наличии его соударений с твёрдой поверхностью. Такое движение имеет место в питателях ударно-гравитационного типа. Явление удара в питателях может использоваться как для снижения скорости транспортируемых деталей, так и для их реверса. Представлен питатель для вертикального перемещения небольших деталей призматической формы. Деталь скользит по наклонной пластине, свободно падает на нижерасположенную пластину, после столкновения с которой может менять положение, переворачиваясь обратной стороной. Количество пластин зависит от высоты, на которую необходимо передать детали, наклон пластин и расстояние между ними зависит от допустимой скорости движения деталей и от необходимости поворачивать деталь. Для плоской модели записаны уравнения динамики для каждого вида движения с использованием отдельной системы координат, составлены формулы преобразования координат. Конечные значения параметров на каждом этапе движения являются начальными в новой системе координат для следующего этапа. Установлены условия реверса детали в результате её столкновения с наклонной плоскостью: для того, чтобы деталь перевернулась, необходимо, чтобы угловая скорость после удара не меняла знак и, кроме того, была достаточна, чтобы тело вращалось в нужном направлении. При наклоне пластины слева направо вниз, положительной начальной скорости вращения и положительном начальном угле между нормалью к пластине и деталью (большем, чем угол наклона пластины к горизонту) скорость вращения после удара остаётся положительной и неупругий удар будет с полным скольжением в одну сторону (направо вниз); отрицательный начальный угол между нормалью к пластине и деталью приводит к перемене направления вращения, при этом абсолютно неупругий удар будет с полным скольжением и переменной его направления. Данные численные решения уравнений движения с помощью программы MathCAD.

### Summary

This paper deals with the dynamics of rigid body that collide with a rigid surface; such motion with impact of bodies takes place in the gravity operated impact feeders. Feeders are mechanisms of the single - piece feeding for the forced moving of the oriented workpieces. The impact phenomena may be used both for decreasing of velocity and for the orientation of the tracking workpieces (lateral reversing). For the vertical translocation of small workpieces of prismatic form a feeder, in which workpieces are moved under gravity on inclined guide plates, is presented in this work. Workpiece slides on inclined plates, freely falls on the below located plate, during impact workpiece can change the position, inverting the back. The number of plates depends on a height on which it is necessary to pass details; slope of plates and distance between them depend on the permissible speed of details motion and necessity to overturn a detail. All stages of plane detail motion are considered: 1) translation motion (sliding on a surface), 2) plane motion (sliding with a rotation) without separation from constraint, 3) free motion in gravity field, 4) impact (collision with rigid plate), 5) plane motion after an impact till the contact with a plate. Dynamics

equations are written down for every type of motion; the features of formulae arrangement and motion parameters definition are the using of proper coordinate system for every type of motion, development of formulas for coordinates conversion and velocity projections transform from one coordinate system into another. Finite values of parameters on each stage are the initial ones for the next stage of motion in new coordinate system. The conditions of inverting of detail as a result of its collision with rigid plate are found. In order to a body turned over it is necessary, that angular speed did not change a direction after impact and, in addition, was sufficient for a body rotation in necessary direction. At inclination of plate from left to right downward, positive initial angular velocity and positive initial angle between surface normal and detail - greater, than inclination angle of plate to horizon - angular velocity after impact remains positive and perfectly inelastic impact will be with complete sliding in one side ( to the right downward); a negative initial angle between surface normal and detail results in a veer rotation, here perfectly inelastic impact will be with the complete sliding and changing of sliding direction. The numeral examples of workpiece motion are given, equations of motion are solved with help of MATHCAD program.

#### **Литература**

1. Виба Я.А. Оптимизация и синтез виброударных машин. Рига: Зинатне, 1988. 253 с.
2. Дерябин М.В., Козлов В.В. К теории систем с односторонними связями, ПММ, т.59, вып. 4., 1995. стр. 531-539.
3. Иванов А.П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.
4. Лапшин В.В. Плоский удар тела о шероховатую поверхность.  
[http://www.keldysh.ru/papers/2001/prep10/prep2001\\_10.html](http://www.keldysh.ru/papers/2001/prep10/prep2001_10.html)
5. Маркеев А.П. Динамика твёрдого тела при наличии его соударений с твёрдой поверхностью. Нелинейная динамика, 2008, т.4, № 1, с. 1-38.
6. Розенблат Г.М. О безотрывных движениях твёрдого тела по плоскости. Доклады РАН, 2007, т.416, № 5, с.622-624.
7. Akella S., Huang W., Lynch K. and Mason M. Parts feeding on a conveyor with a one joint robot. *Algorithmica*, 26(3): 313–344, 2000.
8. Berretty R.P., Goldberg K., Cheung L., Overmars M.H., Smith G., van der Stappen A. Frank. Trap Design for Vibratory Bowl Feeders. <http://ford.ieor.berkeley.edu/~goldberg/pubs/pdf/trap.pdf>.
9. Moll M., Erdmann M.A., Fearing R., Goldberg. Orienting Micro-Scale Parts with Squeeze and Roll Primitives. <http://www.ieor.berkeley.edu/~goldberg/pubs/moll-micromanip.pdf>.